ZENONS Paradoxon und die Entdeckung der Unendlichkeit

BERNHARD GRIESSER, HANS BRÜNGGER, MARIO GERWIG (MIT WILLI EUGSTER UND IVO MÜLLER)

Lehridee

Es ist eine der berühmtesten Paradoxien des ZENON VON ELEA, dem „Begründer einer Philosophie des Unendlichen“ (Bertrand RUSSEL), welche den Ausgangspunkt zu einem Lehrstück über die Entdeckung der Unendlichkeit darstellt: ACHILLES, der schnellste Läufer der Antike, läuft mit einer Schildkröte um die Wette. Aus Gründen der Fairness räumt ACHILLES seinem offenbar unterlegenen Gegner einen Vorsprung ein, womit er sich selbst jedoch in ein scheinbar aussichtsloses Problem hineinmanövriert: Wann immer ACHILLES den ursprünglichen Vorsprung der Schildkröte aufholt, er also an deren Startplatz gelangt, ist die Schildkröte in der Zwischenzeit ein Stück weiter gekrochen. Bis ACHILLES nun dieses Stück durchlaufen hat, so hat die Schildkröte wiederum ein Stück des Weges geschafft. Gelangt ACHILLES dort an, so ist sie bereits wieder ein Stückchen weiter. Natürlich läuft ACHILLES schneller als sein kriechender Gegner, und die Distanz zwischen beiden wird immer kleiner, aber es ist nicht zu übersehen, dass, wenn ACHILLES an irgendeinem Punkt der Rennstrecke ankommt, die Schildkröte inzwischen bereits dort gewesen sein muss. „Das ist der gefürchtete regressus ad infinitum, der unendliche Regress. Ein in diesem Fall bösartiger Regress, weil man, um das Ziel erreichen zu können, eine unendliche Zahl von Handlungen absolvieren muss. Damit wird – da der entscheidende Aspekt von ‚unendlich‘ bedeutet, dass die Zahl dieser Handlungen nicht endet – dass Erreichen des Ziels logisch unmöglich“ [FOSTER WALLACE 2010, 67].

Mit der Paradoxie „ACHILLES und die Schildkröte“ liegt ein erstaunliches Phänomen vor, welches Mathematiker wie Philosophen seit jeher intensiv beschäftigt: PLATON, ARISTOTELES, AGRIPPA, PLOTINUS, William THOMAS, Gottfried Wilhelm LEIBNIZ, John Stuart MILL, Francis Herbert BRADLEY, William JAMES, Otto TOEPLITZ, Douglas Richard HOFSTADTER – sie alle haben sich mit dem rund 2.500 Jahre alten, aber nach wie vor sehr fruchtbaren, von ARISTOTELES überlieferten ZENONschen Dichotomieparadoxon befasst. Erstmalig liegt hier eine Auseinandersetzung mit dem Unendlichen und mit einem nicht abbrechenden Prozess genetisch echt vor. Sie bietet einen hervorragenden Zugang zum Verständnis von Grenzwerten, d. h. von Summen beliebig klein werdender Größen am Beispiel der nicht abbrechenden geometrischen Reihe. Die Summe von unendlich vielen Gliedern einer Reihe wird manifest auf einer endlichen Strecke: Damit wird das Unendliche im Endlichen denk- und greifbar. Im Laufe des Lehrstücks werden für Begriffe wie Konvergenz und Grenzwert Fundamente gelegt, welche zur Infinitesimal- und zur Wahrscheinlichkeitsrechnung – zwei Wissenszweige, ohne die unsere heutige Welt anders aussehen würde – führen werden. Eine Verknüpfung der geometrischen und algebraischen Betrachtungsweisen führt dabei zu einer großen Bereicherung und Vertiefung des Verständnisses.

BRÜNGGER hat die ZENONsche Paradoxie erstmals lehrkunstdidaktisch aufgegriffen [vgl. BRÜNGGER 2005, 173–216]. GRIESSER hat das Lehrstück an der Kantonsschule Trogen (Schweiz) schließlich unter intensiver Mitarbeit von EUGSTER und MÜLLER insbesondere in einer philosophischen Dimension weiter entwickelt [vgl. GRIESSER/BRÜNGGER 2010]. Eine Inszenierung dieser Lehrstückvariante, bei welcher in einer zweiten Ouvertüre mit einem Auftritt der Philosophen PARMENIDES und HERAKLIT besonders das Umfeld, in dem ZENON seine Geschichte erfunden hatte, in den Unterricht einfließt, liegt dem vorliegenden Artikel zu Grunde.

Lehrstück-Komposition

vgl. Lehrstück-Portrait (S. 32 f. in der Druckausgabe des Hefts 6-2013)

Lehrstückbericht

Erste Ouvertüre (eine Doppelstunde)

An der Tafel ist eine Reproduktion der „Schule von Athen“ angebracht. Die Schüler versammeln sich davor, um das Bild zu betrachten und zu beschreiben. Dabei werden einzelne Personen – neben den Mathematikern PYTHAGORAS, EUKLID und ARCHIMEDES insbesondere die zentralen Figuren ARISTOTELES und PLATON samt wichtigen Kernpunkten ihrer Philosophie – knapp vom Lehrer erläutert.

Nun begibt sich die Klasse ins 5. Jahrhundert v. Chr. nach Athen. Ein an die Wand projiziertes Foto bietet einen authentischen Hintergrund, vor welchem sich GRIESSER ein Leinentuch umschlägt und – ganz im Sinne der lehrkunstdidaktischen Dramaturgie – in die Rolle ZENONS VON ELEA schlüpft. Die Klasse schmunzelt, aber das darf sein! Zweimal wird die Geschichte von ACHILLES und der Schildkröte erzählt. Anschließend bekommen die Schülerinnen und Schüler den Auftrag, in Kleingruppen die Geschichte wortlos darzustellen. Nach rund 30 Minuten präsentieren sie ihre überwiegend kreativen zeichnerischen, schauspielerischen und musikalischen Umsetzungen, womit die erste Doppelstunde endet.

Zweite Ouvertüre (optional)

Nachdem die Schülerinnen und Schüler in der ersten Doppelstunde bereits einen Einblick in die Vorsokratische Philosophie erhalten haben, sollen sie sich nun intensiver mit grundlegenden philosophischen Fragestellungen auseinander setzen. Zwei Philosophielehrer – keinesfalls ein Muss, vielmehr ein Idealfall – besuchen daher die Klasse, sie vertreten in ihren Rollen zwei absolut entgegengesetzte Weltanschauungen: die Philosophie des „Seins“ und die des „Werdens“. Schulleiter EUGSTER ist PARMENIDES – ein Lehrer ZENONS – der um 500 v. Chr. in Elea gelebt hat. MÜLLER ist HERAKLIT, der etwa zur gleichen Zeit in Ephesos (heutige Türkei) lebte. Beide geben anhand überlieferter kurzer Zitate Einblick in ihre Philosophie: PARMENIDES beschäftigt sich mit dem „Sein“ und kommt zum Schluss, dass wirklich „Seiendes“ nicht plötzlich verschwinden kann, also sind Veränderungen reine Sinnestäuschungen. Zudem ist für ihn leerer Raum undenkbar, und weil Bewegung leeren Raum voraussetzt, kann es auch keine Bewegung geben.

HERAKLIT führt sich ein mit Sätzen wie „Wir können nicht zweimal in den selben Fluss steigen“, „Gott ist Tag und Nacht, Winter und Sommer, Krieg und Frieden, Überfluss und Hunger“ oder „Der Krieg ist aller Dinge Vater“. HERAKLIT glaubt an die Notwendigkeit der Gegensätze. Ohne die Spannung zwischen gegensätzlichen Polen und Meinungen gäbe es kein Leben, sondern nur ewigen Stillstand und Tod.

Abb. 1: ZENON (B. GRIESSER), HERAKLIT (I. MÜLLER) und PARMENIDES (W. EUGSTER, v. l.) diskutieren ihre Positionen vor der Klasse. Im Hintergrund sind die Akropolis, die von den Schülern angefertigten zeichnerischen Umsetzungen der ACHILLES-Geschichte sowie RAFFAELS Schule von Athen zu sehen.

PARMENIDES und HERAKLIT beginnen ein Streitgespräch. Jeder kämpft engagiert für seinen Standpunkt und versucht, dem jeweils anderen beizubringen, dass dieser falsch liege. Die Schüler verfolgen dieses spannende Schauspiel hoch konzentriert. Man stelle sich vor: Der Schulleiter und der Lateinlehrer inszenieren in der Mathematikstunde ein Streitgespräch zwischen zwei Vorsokratikern und erklären dabei dem jeweils anderen, dass kein vernünftiger Mensch zu dessen Ansichten kommen könne.

Nach dem Streitgespräch – einen Gewinner gibt es nicht – sind die Schüler aufgefordert, einige Original-Zitate den beiden Philosophen zuzuordnen und in Gruppen das Menschenbild PARMENIDES' bzw. HERAKLITS zu diskutieren. Die drei Lehrer mischen sich unter die Lernenden, beobachten, hören zu, helfen oder diskutieren mit.

Die zweite Woche

Der Einstieg in die nächste Doppelstunde erfolgt mit einem Gläserexperiment. Wortlos wird ein Glas mit gefärbtem Wasser bis zum Rand gefüllt. Anschließend wird die Hälfte der Flüssigkeit in ein weiteres Glas umgeschüttet. Von diesem wiederum wird die Hälfte in ein neues Glas gefüllt usf. Mit einer Handgeste wird angedeutet, dass dieser Prozess ohne Ende durchgeführt werden soll, bevor wieder alles in das erste Glas zurückgegossen wird. Mit diesem einfachen Experiment wird vielen Schülerinnen und Schülern bewusst, dass bei beliebigem Aufteilen eines Ganzen die Summe der Teile nicht mehr als das ursprüngliche

Ganze sein kann. Es liefert eine anschauliche Erklärung dafür, dass eine unendliche Reihe einen endlichen Wert haben kann. Ein gut memorierbares Bild, das im Idealfall wie ein Ritual wirken kann.

Im Anschluss erfolgt der Rückbezug zum anfänglichen ZENON-Problem: Wo steckt nun in dessen Argumentation der Fehler? Nach rund 20 Minuten werden die Ergebnisse gesammelt. Viele beziehen sich auf das Gläserexperiment, dennoch argumentiert niemand gänzlich richtig. Häufig taucht als Antwort auf: „Die Theorie widerspricht der Praxis“ und es ist nicht ganz klar, ob diese Schüler sogar gut mit diesem Widerspruch leben könnten und bereit wären, innerhalb der Mathematikstunden ZENON zu glauben. Weitere Antworten sind „Zenon dehnt die Zeit“ und „die reale Welt hat Moleküle“. In beiden Fällen wurden auch die richtigen Ort-Zeit-Diagramme angefertigt und eine Gruppe kann sogar die Aufholvorgänge richtig einzeichnen – die Auflösung des Paradoxons rückt damit schon sehr nahe.

Das Problem wird nun mit einigen Zahlen (Vorsprung a_o, Geschwindigkeiten v_A und v_S von ACHILLES bzw. der Schildkröte) konkretisiert und die Schüler berechnen den Zeitpunkt des Überholens und die dabei zurückgelegte Strecke. Am Ende der Doppelstunde wird das mithilfe des Gläserexperiments Erarbeitete in Form einer unendlichen Summe gesichert:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1.$$

Die nächste Doppelstunde wird mit einem weiteren Beispiel für eine endliche Summe mit einer unendlichen Anzahl Summanden eröffnet:

$$0{,}3+0{,}03+0{,}003+0{,}0003+\ldots=\frac{1}{3}.$$

Die Beispiele zeigen: Jede positive Strecke kann immer weiter geteilt werden, es gibt kein Kleinstes.

Anschließend wird das untenstehende Bild an der Tafel fixiert, die Ortsfunktionen für Achilles $s = v_A \cdot t$ und die Schildkröte $s = v_S \cdot t + a_0$ sowie die Koordinaten des Schnittpunkts $P\,(t/s)$ werden eingezeichnet. Es soll nun geklärt werden, was das Diagramm genau aussagt, d. h., die Paradoxie soll wenigstens formuliert werden, wenn sie auch (noch) nicht endgültig aufgelöst werden kann. Niemand kommt allerdings darauf, dass ZENON die endliche Strecke s, bis ACHILLES die Schildkröte einholt, in unendlich viele Teile zersplittert (weil es keine kleinste positive Strecke gibt, geht das im Modell der reellen Zahlen) und ebenso die endliche Zeitdauer, bis ACHILLES die Schildkröte einholt, in unendlich viele Teile zerteilt. Die Antworten der Schüler enthalten vor allem Halbwahrheiten, sodass von Lehrerseite aus bisweilen unterstützend und klärend eingegriffen werden muss, damit nicht alle Lernenden den Faden verlieren und die richtige Auflösung verpassen.

Es ist erstaunlich, mit welcher Beharrlichkeit sich das atomistische Modell immer wieder meldet: Einerseits sind die Schülerinnen und Schüler vom Gläserexperiment völlig überzeugt, andererseits tauchen plötzlich wieder Zweifel auf, dass die Summe von unendlich vielen Strecken endlich sein kann. In diesen Momenten des Zweifels erwies sich folgendes Gedankenexperiment als hilfreich: Am Anfang steht die Frage, ob man eine positive Strecke halbieren kann. Entweder geht das immer, dann gibt es also keine kleinste Strecke, oder es geht nicht immer, was bedeutete, dass es kleinste, nicht weiter teilbare Strecken gibt (Indivisible oder Atome).

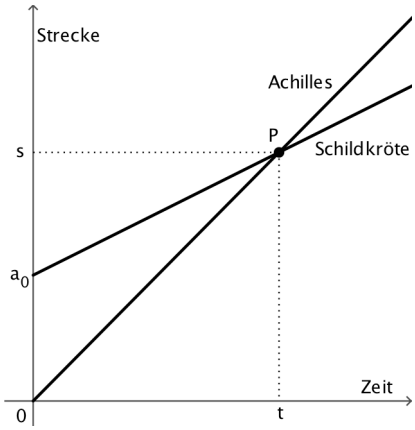

Abb. 2: Weg-Zeit-Diagramm zum ACHILLES-Problem …

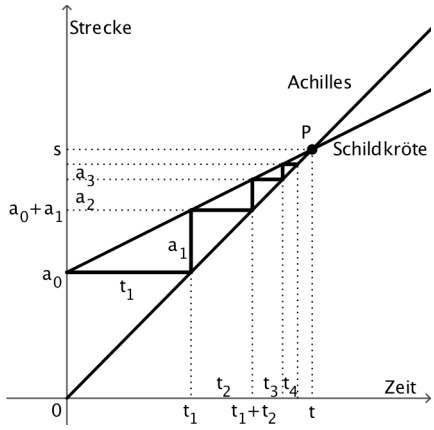

Abb. 3: … zusammen mit ZENONS Zeit- und Wegstücken.

Betrachten wir zunächst die erste Variante, so betreiben wir Mathematik in den reellen Zahlen. Es ist also möglich, eine Zahl als unendliche Summe zu schreiben. Betrachten wir nun die zweite Variante, haben wir uns für ein „atomistisches" Modell entschieden, mit welchem man etwa in der Quantenphysik arbeitet. In diesem Modell ist die Geschichte von ZENON allerdings gar nicht möglich, Denn irgendwann gäbe es einen kleinsten Vorsprung, den ACHILLES im dazugehörigen Zeitmoment durcheilen würde und die Geschichte bräche ab.

ZENONS Widerspruch ist also nur dann ein Widerspruch, wenn diese beiden Modelle vermischt werden. Einerseits glaubt man, eine Strecke könne beliebig oft geteilt werden, andererseits aber denkt man, unendlich viele Zeitmomente zusammengezählt ergäben eine unendliche Zeit (was einer atomistischen Vorstellung entspricht) – ein Widerspruch ist nur die logische Konsequenz: Man kann doch nicht gleichzeitig behaupten, unendlich viele Streckenteile ergäben eine endliche Strecke (da es keine „kleinste Strecke" gibt), aber unendlich viele Zeitintervalle kein endliches Zeitintervall!

Abb. 3 zeigt, dass ZENON vorgaukelt, das Durchschreiten der unendlich vielen Schritte bis zum Schnittpunkt der zwei Ortsfunktionen würde ewig dauern. Es dauert aber genau so lang, wie ACHILLES zum Einholen der Schildkröte braucht. Richtig interpretiert, beschreibt ZENON zwei konvergierende Reihen: die von ACHILLES zurückgelegten Teilstrecken (senkrecht dargestellt), die sich zur Strecke vom Start bis zum Überholpunkt addieren, und die dazugehörigen Zeiten (waagerecht dargestellt), die als Summe die Einholzeit ergeben. Wir begegnen hier in einem antiken Problem dem Grenzwert. Konkret: Sowohl die Strecke zwischen ACHILLES und der Schildkröte als auch die für den Aufholvorgang benötigte Zeit werden von ZENON in unendlich viele Teile zersplittert. Aber: Sowohl die Summe der unendlich vielen Wegstrecken als auch die Summe der unendlich vielen Zeiteinheiten ist endlich! ACHILLES durchschreitet bei seinem Aufholvorgang also in unendlich vielen Zeitintervallen unendlich viele Wegstrecken, und trotzdem benötigt er dafür in der Summe „nur" endlich viel Zeit.

Damit ist das ZENONsche Paradoxon aufgeklärt. Die Reflexion darüber nahm insgesamt vier Doppelstunden in Anspruch. Viel Zeit, aber sie ist keineswegs verschenkt. Die sonderbar erscheinende Geschichte, die verschiedenen und ungewohnten Gedankengänge, der innere Widerspruch „Erfahrung vs. Anschauung" – das alles muss sich „einwurzeln" können, wie

WAGENSCHEIN sagt [vgl. WAGENSCHEIN 2008, 78ff.] – und dazu braucht man Zeit. „Durch straffe Flüchtigkeit wird man fertig, ohne angefangen zu haben“ [WAGENSCHEIN 2002, 123].

Nun also sind die Grundlagen gelegt, das Paradoxe der Geschichte ist aufgelöst und steht auf einem festen Fundament, sodass das Lerntempo für einen Theorieblock erhöht werden kann. Die bislang gerechneten Beispiele zeigen, dass die Summanden immer um den gleichen Faktor kleiner werden, was unmittelbar zur geometrischen Reihe führt. Auch die arithmetische Reihe und die Summenformel für geometrische Reihen werden dabei eingeführt (auf TORRICELLIS geometrische Herleitung für die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe kann dabei durchaus zurückgegriffen werden).

Gefolgt wird diese Theorie-Phase von einer Partnerarbeit zur geometrischen Reihe, das Präsentieren der einzelnen Arbeiten wird wiederum von zwei kürzeren Übungsblöcken unterbrochen. Anschließend folgt eine kurze Einführung in die „Epsilontik“, mit welcher die Schüler jedoch nur rudimentär arbeiten.

Finale

Zum Finale des Lehrstücks bietet sich nicht nur aus dramaturgischen Gründen ein Philosophie-Abschluss an. PARMENIDES und HERAKLIT treten erneut auf und kommen mit den Schülern ins Gespräch. Dabei reflektieren alle gemeinsam über die letzten Stunden und vertiefen so die gewonnenen Erkenntnisse. Erfahrungsgemäß haben Schülerinnen und Schüler oftmals Mühe mit den Ansichten von PARMENIDES, der wirkliches Sein als unveränderbar anschaut. Hilfreich erscheint dann der Hinweis, dass die Mathematik solche „unveränderlichen Wahrheiten“ sucht: Der Satz des PYTHAGORAS oder die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung gelten selbst dann noch, wenn es einmal keine Menschen mehr geben wird! In diesem letzten Gespräch wird auch thematisiert, dass ZENONS immer kleiner werdende Schritte am Anfang einer riesigen Entwicklung in der Mathematik stehen. Und so endet das Streitgespräch zwischen PARMENIDES und HERAKLIT mit folgenden, gewichtigen Worten von HERAKLIT an ZENON: „Das ‚Schritt um Schritt‘ in deiner Geschichte öffnet mir die Augen. Du meinst, dein ‚Schritt um Schritt‘ würde sich in der Unendlichkeit verlieren und damit das Verstehen der Natur mithilfe logischer Argumente verunmöglichen. Aber deine unendlich vielen Schritte ergeben etwas Endliches. Ich sehe keinen Widerspruch in deiner Geschichte, sondern ein neues, mächtiges Werkzeug. Deine Idee, sich schrittweise einer Sache anzunähern, wird ARCHIMEDES helfen, die Kreisfläche und die Kugel zu berechnen. Deine Idee des ‚Schritt um Schritt‘ wird NEWTON und LEIBNIZ helfen, die Veränderungen in der Natur mithilfe des Wachstums, der Geschwindigkeit, der Steigung einer Funktion zu beschreiben. ZENON, nicht den Stillstand beschreibst du. Nein, du lieferst die Idee, wie man Werden und Vergehen beschreiben kann. Nach unserem Streitgespräch bin ich noch mehr davon überzeugt, dass alles im Fluss ist. Aber mit deinem ‚Schritt um Schritt‘ werden künftige Generationen die Natur so beschreiben können, wie ich sie sehe! Dein ‚Schritt um Schritt‘ beschreibt meinen Fluss. ZENON, ich bin dir für deine Geschichte unendlich dankbar!“

Rückblick

Rituale

Gesten, Symbole, und Rituale sind ein besonderes Merkmal dieses Lehrstücks. Sie strukturieren den zeitlichen Ablauf des Unterrichts, unterstützen und fördern die Konzentration auf

das Wesentliche, schaffen eine besondere, eine produktive Arbeitsatmosphäre. So stand bei einigen Inszenierungen während des gesamten Lehrstücks eine Schildkröte aus Ton auf dem Lehrerpult, welche an die Geschichte ZENONS erinnerte. Zudem hingen RAFFAELS Bild „Schule von Athen" und die Bilder der Schüler zur Illustration der Geschichte ZENONS stets für alle sichtbar im Raum.

Stundeneinstiege

Die zahlreichen existierenden Spezialitäten des Unendlichkeitsbegriffs ermöglichen es, jede Unterrichtsstunde mit etwas Besonderem zu eröffnen. Da sind einerseits die zwei bereits beschriebenen Ouvertüren sowie das Gläserexperiment. Aber auch Evangelista TORRICELLI, von dem auch ein geometrischer Beweis zur Summenformel einer geometrischen Reihe stammt, Bilder des niederländischen Künstlers M. C. ESCHER, Giacomo LEOPARDIS Gedicht „Das Unendliche", GALILEIS Paradoxon und erstaunliche Summen wie $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm ...$ von James GREGORY (1671) oder Mani MATTERS Lied „Bim Coiffeur" (Textauszug: „Bim Coiffeur bin i gsässe vor em Spiegel, luege dry; und gseh dert drinn e Spiegel wo ar Wand isch vis-à-vis; und dert drin wieder spieglet sech dr Spiegel da vor mir; und i däm Spiegel widerum dr Spiegel hindefür; (…) my Chopf, dä het sich dert ir Wyti, stellet öich das vor; verloren in Unäntlechkeit vom länge Korridor; i ha mi sälber hinde gseh verschwinde, ha das gseh; am heiterhälle Vormittag und wi we nüt wär gscheh") können weitere Perspektiven auf den Unendlichkeitsbegriff eröffnen und so die *fundamentale und überraschende Erkenntnis, dass das Unendliche in jedem Endlichen bereits enthalten ist*, vertiefen.

Stimmen zum Lehrstück

Lehrerstimmen

BRÜNGGER: „Dass wir trotz der zahlreichen Inszenierungen bis jetzt keine endgültige Form für das Lehrstück gefunden haben, ist ein gutes Zeichen: Es bleibt für mich lebendig und wird wohl nie zum Stillstand kommen."

GRIESSER: „Die Zusammenarbeit mit meinen Kollegen habe ich als äußerst bereichernd empfunden. Auch schätze ich die Abwechslung in diesem Stück, das Wechseln des Rhythmus, das Nachdenken über das unendlich Kleine, das Symbolhafte und auch die verspielten Momente. Die Geschichte von ZENON ist sehr stark und ich verweile gerne dabei. Doch immer wieder muss ich mich erneut fragen: In welchem Moment verlasse ich das beschauliche Verweilen bei ACHILLES und der Schildkröte und verlange von den Schülern spediti-ves Arbeiten?"

EUGSTER: „Ich habe die Diskussionen mit meinen Kollegen sehr geschätzt. Aus den philosophischen Texten versuchten wir, uns ein Bild über das Denken in jener fernen Zeit, in der ZENON lebte, zu schaffen. Wir diskutierten lange und intensiv, bis wir das erste Mal vor die Schülerinnen und Schüler traten. Das fiktive Gespräch zwischen ZENON, PARMENIDES und HERAKLIT im Unterricht zu generieren, war dann ein ungeheures Erlebnis. Ich war nach der ersten Doppelstunde noch so aufgewühlt, dass die Konzentration den ganzen Tag über litt."

MÜLLER: „Die tiefe kollegial-menschliche Zusammenarbeit unter Kollegen und Kolleginnen, wo jeder die Unterstützung des andern erfährt, wobei eine kollegiale Kritik auch dazu-

gehört, die Wirkung auf den ‚normalen' Unterricht, der von den Prinzipien der Lehrkunstdidaktik sehr profitiert, ohne dass das Thema jedesmal zu einem Lehrstück geraten muss, schließlich der Zugang der Schüler zu einer Sternstunde der Menschheit und nicht zu vergessen die Befriedigung des Lehrers über den Lehr- und Lernerfolg: das sind die verschiedenen Wirkungen, die die pädagogisch-didaktische Arbeit mit Lehrstücken auf mich gehabt hat und hat. Die Zusammenarbeit beim Lehrstück ‚ACHILLES und die Schildkröte' hat diese Wirkungen in ganz speziellem Sinne hervorgebracht: der Einbezug der antiken Philosophie auf eine authentische Art, die Sichtbarmachung des Zusammenhangs zwischen Philosophie und Mathematik, das ungezwungene Suchen (trotz schwieriger Texte!) von Lehrkräften und Schülern, all dies und noch viel mehr hat zu einer freudigen Konzentration, zu einem lebendigen Gespräch und erstaunlichen Resultaten geführt – in Mathematik und Philosophie und und ganz nebenbei (?) im Verständnis der Kulturentwicklung."

Schülerstimmen

KATHRIN: „Die Philosophielektionen haben mir sehr gefallen. Ich finde es wichtig, einmal auf die Ursprünge der Mathematik hinzuweisen und zu sehen, wie eng die Mathematik mit Philosophie verbunden ist."

ADRIAN: „Das Gläserexperiment hat mir sehr gefallen. Es war die Eselsbrücke zum Thema."

URSULA: „Der Auftritt Zenons war ein gelungener Einstieg, sehr überraschend und witzig."

Eva und Remo schreiben vier Jahre später auf einer Karte von Rom: „Während unserer Besichtigung Roms mussten wir ab und zu an die Mathematik-Stunden denken. Besonders geblieben ist uns der Auftritt der drei griechischen Gelehrten (EUGSTER, MÜLLER, GRIESSER) und ihre Erläuterungen zur ‚Schule von Athen', welche wir nun im Original gesehen haben."

Literatur

[1] BRÜNGGER, HANS (2005): Von Pythagoras zu Pascal. Fünf Lehrstücke der Mathematik als Brückenpfeiler im Gymnasium. Schulverlag blmv. Bern.

[2] EUGSTER, WILLI; BERG, HANS CHRISTOPH (Hrsg.) (2010): Kollegiale Lehrkunstwerkstatt. Sternstunden der Menschheit im Unterricht der Kantonsschule Trogen. Band 3 der hep-Reihe „Lehrkunstdidaktik". hep-Verlag. Bern.

[3] FOSTER WALLACE, DAVID (^{3}2010): Die Entdeckung des Unendlichen. Georg Cantor und die Welt der Mathematik. Piper. München.

[4] GRIESSER, BERNHARD; BRÜNGGER, HANS (2010): Achilles und die Schildkröte. In: Eugster, Berg (2010), 147–151.

[5] WAGENSCHEIN, MARTIN (2002): „… zäh am Staunen". Pädagogische Texte zum Bestehen der Wissensgesellschaft. Zusammengestellt und herausgegeben von Horst Rumpf. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung. Seelze-Velber.

[6] WAGENSCHEIN, MARTIN (^{4}2008): Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch. Beltz. Weinheim und Basel.