Ein Stufenmodell für das Lehren von Abbildungen und des Symmetriebegriffs

Von Herbert Glaser

1 Rechtfertigung

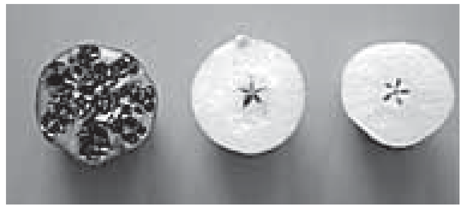

Abb. 1: Kerne bei Granatapfel, Apfel und Birne

Umgangssprachlich kann man Symmetrie als das Auftreten von Regelmäßigkeiten und Ausgewogenheit beschreiben. Irgendwann hat jeder entdeckt, dass die Kerne in manchen Früchten fast regelmäßig verteilt sind (vgl. **Abb. 1**).

In einer ersten Analyse werden physikalische Bewegungen benutzt, um einen Teil des betreffenden Musters in Gedanken zu wiederholen, indem man ihn umklappt, dreht oder verschiebt. Aus diesen Repräsentationsformen entwuchsen die mathematischen Begriffe Spiegelung, Drehung und Verschiebung. Allmählich wurden diese Abbildungen zu eigenständigen Zielen des Denkens, indem man in der Geometrie von ihren Eigenschaften jene untersuchte, die mit Formen zusammenhängen, wie z. B. die Beziehung zwischen Längen- und Winkeltreue, und in der Algebra jene, die mit dem „ Kombinieren“ der Abbildungen zusammenhängen. Die Untersuchung der Eigenschaften solcher Verknüpfungsgebilde führte schließlich zu dem abstrakten Begriff der Gruppe.

Dann wurde der Gruppenbegriff als Analysewerkzeug wieder auf die Objekte angewandt, denen er u. a. seine Entstehung verdankt. Ein ausführliche Darstellung der Rolle von Abbildungen bei der Entwicklung des Gruppenbegriffs findet sich in (Wussing 1969).

Die Bedeutung von Symmetrie in der Malerei, Architektur und Naturwissenschaft ist heute unbestritten. Einen Überblick geben (Brandmüller 1982) und (Tarassow 1999). Unübertroffen sind die Analysen von Formen in der Kunst durch die Klassiker (Weyl 1952), (Speiser 1956) und (Thoth 1965). Diese Analysen wurden in den Teilgebieten Ornamentik und regelmäßige Körpern fortgeführt, indem zusätzlich zu der Symmetrie von Formen auch die der Abfolge von Farben in Ornamenten allgemein in (Loeb 1978) und speziell im Werk des holländischen Künstlers Escher in (Schattschneider 1990) untersucht wurden.

Unter den zahlreichen Werken, die sich mit Symmetrien in Bauwerken beschäftigen, nimmt (Götze 1998) einen besonderen Platz ein, da die arabischen Ursprünge der oktagonalen Symmetrie in der Burg Castel del Monte des Stauferkönigs Friedrich II. und weitere Vorkommnisse in abendländischen Bauwerken analysiert werden. Untersuchungen zum Auftreten von Symmetrie in der Natur finden sich in (Thompson 1948) und (Klemm 1982). Traumhaft schöne Bilder in (Field 1992) zeigen hochsymmetrische Formen in Strukturen des Chaos. Den Nutzen von Symmetrieüberlegungen beim Problemlösen betonen u. a. (Polya 1945), (Goldin 1980) und (Engel 1998). Zum Schmunzeln verleiten die ersten Symmetrieerfahrungen in den Kinderbüchern (Walter 1973), (Walter 1975). Die Aussagen in den genannten Quellen kann man zu den folgenden Aspekten kondensieren:

1. Symmetrische Objekte haben ästhetische Wirkungen;
2. Symmetrische Objekte haben optimale Eigenschaften;
3. Symmetrien ermöglichen geschickte Zählverfahren;
4. Symmetrien ermöglichen die Herleitung von Figureneigenschaften;
5. Symmetrien ermöglichen Ordnungen
6. Symmetrie lässt sich mit Begriffen der Algebra beschreiben
7. Symmetrieüberlegungen sind nützliche Teile von Lösungsstrategien.

Die Bedeutung des Symmetriebegriffes rechtfertigt, ihn aus mathematischer Sicht auf allen Schulstufen zu behandeln. Dies bedeutet aber, auch die zu seiner Analyse nötigen Werkzeuge, also Abbildungen, sind im Mathematikunterricht zu untersuchen. Weiterhin können elementargeometrische Argumentationen, die sich in der Tradition von EUKLID auf Kongruenzsätze stützen, durch Argumentationen mit Abbildungen unter Bezug auf die Anschauung ersetzt werden. Diese und ähnliche Argumente führten dazu, dass die so genannte Abbildungsgeometrie in den Jahren von etwa 1960 bis 1980 die traditionelle so genannte euklidische Methode fast völlig verdrängte.

Nach einer anfänglichen Euphorie wurden kritische Stimmen laut, wie (BENDER 1982) und (BECKMANN 1989), die als Konsequenz ihrer empirischen Befunde mutig empfahl (a. a. O., S. 382, 9. Z. v. u):

Vordringliche didaktische Aufgabe sollte es sein, geeignete Alternativen zur Abbildungsgeometrie zu finden.

Die gründliche Analyse (KAHLE 1996) wies nach, dass die Grundidee des Erlanger Programms, die Zuordnung von geometrischen Inhalten zu verschiedenen Geometrien, nur einen verhältnismäßig geringen Einfluss auf den damaligen Unterricht hatte, wenn gleich auch der Wunsch, das Erlanger Programm von KLEIN im Gymnasium zu behandeln, die abbildungsgeometrische Methode favorisiert hatte.

Vermutlich in Folge dieser Untersuchungen und ihrer eigenen Unterrichtserfahrungen wanden sich die Lehrerinnen und Lehrer wieder der so genannten klassischen euklidischen Methode zu. Die Entwicklung führte schließlich dazu, dass heute mit den Abbildungen auch die Beschäftigung mit Symmetrie aus dem Unterricht des Gymnasiums zu verschwinden droht.

Die folgenden Überlegungen übertragen das Stufenmodell zum Lehren des Funktionsbegriffes in (VOLLRATH 1984), S. 215, und (VOLLRATH 2003), S.141 – 142, auf geometrische Abbildungen und den Symmetriebegriff in der Geometrie. Beispiele für das Auftreten von Symmetrie bei Zahlen und den angemessenen Einsatz von Computeralgebrasystemen finden sich in (GLASER 1995), (GLASER 1999) und (GLASER 2000).

Die Ausführungen zielen nicht darauf ab, die so genannte abbildungsgeometrische Methode wieder zu beleben, sondern sollen helfen, dem Begriff der Symmetrie und den zu seiner mathematischen Behandlung nötigen Werkzeugen, den Abbildungen, wieder einen angemessenen Platz im Curriculum aller Schularten und in der Ausbildung der Lehrenden zu verschaffen. Natürlich fließen Erfahrungen in der Ausbildung von Lehrenden ein, die in 30 Jahren gesammelt wurden, von denen ich 26 mit Herrn Vollrath, sehr angenehm, zusammenarbeiten durfte.

2 Stufenmodell für Abbildungen

Das Lehren von Begriffen in Stufen hat im Gymnasium eine lange Tradition, insbesondere in der Geometrie. Ausführliche Analysen finden sich in (VOLLRATH 1978) und (ANDELFINGER 1988). Auch in der Grundschule wird das VOLLRATH'sche Stufenmodell für das Lehren geometrischer Begriffe in (FRANKE 2000) empfohlen.

Die Beschreibung des Stufenmodells enthält neben den inhaltlichen Zielen und angestrebten Fähigkeiten der Lernenden auch Angaben methodischer Maßnahmen.

Der Terminus Lernende wurde gewählt, um nicht zwischen Schülerinnen und Schülern und Studierenden unterscheiden zu müssen. Die in der Beschreibung der ersten Stufe angeführten Beispiele sind meist so formuliert, dass sie sich auf Handlungen mit konkreten Gegenständen in der Umwelt beziehen und durch den Umgang mit Materialien gelöst werden können. Daraus darf aber nicht gefolgert werden, dass sie nur für den Unterricht in den Klassenstufen 1 bis 6 vorgesehen sind, da zahlreiche Erprobungen der Aufgaben mit Studierenden für das Lehramt an allen Schulstufen und bei hochbegabten Lernenden aus der Kollegstufe zeigten, dass der Einstieg auf der enaktiven Ebene gerne angenommen wurde und dass das Umgehen mit Gegenständen oft eine Lösungsstrategie anregte.

Aus Platzgründen wurden die Stufen 3 bis 5 knapper dargestellt.

2.1 1. Stufe: Der Begriff als Phänomen

Die Lernenden gehen mit enaktiven und ikonischen Repräsentationsformen um. Dabei gewinnen sie anschauliche Vorstellungen, indem sie sich einmal an die Objekte erinnern und zum anderen diese Erinnerungsbilder verändern und neu zusammensetzen, um geeignete Aufgaben zu lösen. Indem die Lernenden die Objekte und ihre Handlungen zu beschreiben versuchen, üben sie ihre sprachliche Ausdruckfähigkeit. Wenn diese nicht ausreicht, erfahren sie, dass bekannte Wendungen in der Geometrie eine besondere Bedeutung haben können. Schließlich werden sie angehalten erste, neue Begriffe der Fachsprache zu gebrauchen. In den Aufgaben treten alle Symmetrien auf, um die Komplexität von Erscheinungsformen der Umwelt der Lernenden zu verringern.

Um diese Ziele zu erreichen, ist es wichtig, möglichst viele Repräsentanten eines Begriffs kennen zu lernen. Manche Repräsentanten sprechen einige Lernende stärker an als andere. Verschiedenartige Repräsentanten helfen, Fehlschlüsse zu vermeiden, die auf eine einseitige Auswahl zurückgehen. Die Fehlschlüsse können entstehen, wenn der Lernende Merkmale, die nur gewissen Repräsentanten zukommen, mit dem Gesamtbegriff verbindet.

Das Bewegen realer Objekte (physikalische Bewegungen, Transparentpapiermethode) erzwingt eine zeitliche Abfolge bei der Entstehung des Bildes aus dem Urbild, die nicht zu dem mathematischen Begriff der Abbildung gehört, und im Gegensatz zu dem unmittelbaren, „zeitlosen“ Erscheinen des Spiegelbildes bei Verwenden eines Spiegels oder einer gefärbten Glasplatte (z. B. Mira-Spiegel) steht.

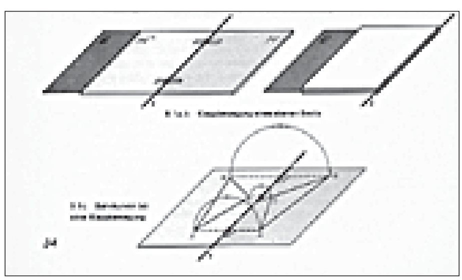

Abb. 2: Kopie der Abbildung 9.1 c „ Bahnkurven bei einer Klappbewegung“, in Faber, K.: Geometrie 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 19742 , S. 34

Bei der Faltmethode bewegen sich die Punkte auf Kreisbögen. Die Form der Spur wird eingeschränkt, und es wird suggeriert, dass der Umweg über den Raum für die Spiegelung an einer Geraden in der Ebene nötig ist (s. **Abb. 2**).

Gründliche Untersuchungen zu Repräsentationen von Abbildungen finden sich in (LIND 1978) und (KIRSCHE 1992).

2.1.1 Erkennen von Symmetrie

Als eine der ersten Aktivitäten zur Begriffsbildung hat sich das Erkennen der Symmetrie von Figuren und Körpern aus Umwelt, Natur und Kunst bewährt.

Beispiel 2.1 *Man zeige den Lernenden kaukasische und persische Teppiche – wenn möglich reale, sonst auf Bildern – und fordere sie auf, Unterschiede zu beschreiben. Die klassischen persischen Teppiche, z. B. ein Kirman, sind meist völlig regelmäßig mit floralen Mustern gestaltet, während auf Kasaks geometrische Motive vorherrschen. Kenner lieben es, wenn bei sonst achsensymmetrischer Anordnung der stilisierten Umweltobjekte plötzlich die Hunde am linken und rechten Rand des Teppichs in die gleiche Richtung schauen, oder wenn die Regelmäßigkeit der Farbfolge gestört ist.*

Beispiel 2.2 *Man zeige den Lernenden Werke von Malern, die translative oder bilaterale Symmetrien aufweisen.*

Abb. 3: Der Thuner See von Ferdinand Hodler aus dem Jahre 1909

Die Analyse von Teppichen oder Bildern nach symmetrischen Gestaltungsprinzipien kann fachübergreifende Verbindungen ermöglichen und den Lernenden Erlebniswelten öffnen, die ihnen bisher, vielleicht wegen ihres sozialen Umfeldes, verschlossen waren.

Auf der enaktiven Ebene erkennen die Lernenden eine ausgeschnittene Figur als achsensymmetrisch, wenn man sie mindestens einmal so falten kann, dass ihre Ränder aufeinander fallen, oder die Kante eines rechteckigen Spiegels so auf die Figur setzen kann, dass das im Spiegel sichtbare Bild den Teil der Figur vor dem Spiegel zur ursprünglichen Figur ergänzt. Letzteres ist meist nur in grober Näherung möglich. Wenn der undurchsichtige Spiegel durch eine gefärbte Glasplatte ersetzt wird, sehen die Lernenden einen Teil der Figur durch den Spiegel und das Spiegelbild, so dass beide sehr genau zur Deckung gebracht und die Spiegelachse durch Entlangfahren mit einem Schreibgerät an der Spiegelkante sehr genau bestimmt werden kann.

Das folgende Beispiel bereitet manchen Lernenden große Schwierigkeiten, da es auch nicht erzeugbare Muster enthält.

Beispiel 2.3 *Kann man einen Spiegel so auf die Figur F in* ***Abbildung 4*** *stellen, dass eine Teilfigur T von F und ihr Spiegelbild T9 zusammen die folgenden Figuren 1 bis 10 ergeben? Zeichnen Sie jeweils die Spur der spiegelnden Ebene ein.*

Auf der enaktiven Ebene erkennen die Lernenden einen vorgelegten Körper als ebenen-

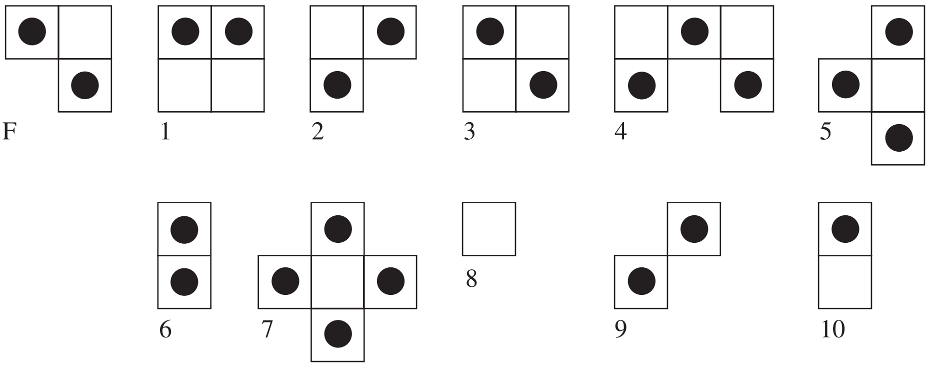

Abb. 4: Erzeugen vorgegebener Muster aus Grundmuster durch Aufstellen eines Spiegels

symmetrisch, wenn sie ihn mit einem Schnitt in zwei kongruente Teilkörper zerlegen, wobei die Schnittebene auf den geschnittenen Kanten senkrecht steht. Sinngemäß gilt dies auch für das Zusammensetzen des Körpers aus zwei kongruenten Teilen. Auf der enaktiven Ebene erkennen die Lernenden einen vorgelegten Körper als drehsymmetrisch, wenn sie ihn auf einem Stab oder Stricknadel „ aufspießen“ und dann so drehen können, dass er wieder die gleiche Raumlage einnimmt. Als Notbehelf kann man versuchen, den Körper zwischen zwei Finger einzuspannen und dann zu drehen. Dies klappt bei Quadern ganz gut.

So einfach die vorstehenden Überlegungen für den Fachmann klingen, darf man sich nicht über die damit verbundenen Schwierigkeiten sowohl auf fachlichem Gebiet als auch im Verbalisieren hinwegtäuschen. Dies belegen unzählige Erfahrungen in den mündlichen Prüfungen im Staatsexamen für alle Lehrämter. Die Mehrzahl der Prüflinge hat erhebliche Schwierigkeiten flüssig und in vollkommenen Sätzen zu erläutern, auf welche Eigenschaften der jeweiligen Abbildungen sich die Handlungen stützen. Immer wieder werden Begriffe aus der Symmetrie ebener Figuren völlig unkritisch auf dreidimensionale ebenensymmetrische Körper übertragen, etwa wie die Aussage, dass bestimmte Gebäude achsensymmetrisch sind.

2.1.2 Erzeugen von Symmetrie

Neben den beliebten Klecksbildern sind Aktivitäten wichtig, die sich auf Symmetrieeigenschaften stützen. Das Legen symmetrischer Figuren mit Plättchen verschiedener Form ist zwar bekannt, unterbleibt im Unterricht aber oft, da entweder das Material fehlt, oder die Unterrichtenden die Aktivität als zu trivial einschätzen, womit sie meist irren.

Hier sind auch so genannte Spiele zu nennen, die käuflich zu erwerben sind, und deren Idee darauf beruht, dass aus den beiliegenden Plättchen passende auszuwählen und dann vor einem aufgestellten Spiegel so aneinander zu legen sind, dass die Vereinigung der Figur vor dem Spiegel mit ihrem Spiegelbild vorgegebene Figuren nachbildet. Man täusche sich nicht in den Anforderungen. Studierende in Würzburg nehmen immer wieder gerne diese „ Spielerei“ in die Hand, weil sie der ästhetische Reiz der Muster fasziniert.

Beispiel 2.4 *Gegeben ist ein unregelmäßig berandetes Papier und eine Schere. Umständlich kann man eine Raute ausschneiden, indem man einen Schnitt längs jeder Seite macht, also vier Schnitte insgesamt. Kannst du eine Raute mit einem Schnitt aus dem Blatt Papier ausschneiden?*

Wenig praktiziert wird – vermutlich weil das Material unbekannt ist -, die Aufgabe, neben eine unfertige Figur einen Mira-Spiegel zu stellen und die Figur dann symmetrisch zu ergänzen, indem man von der Seite der Figur in den Mira-Spiegel blickt und das in der Glasplatte sichtbare Bild hinter der Glasplatte auf dem Papier nach fährt. Diese Übung schult in der Grundschule auch die manuelle Geschicklichkeit.

Das Spannen drehsymmetrischer Figuren auf einem Geobrett ist beliebt, da die Arbeit durch Drehen des Brettes leicht überprüft werden kann. Die Schwierigkeiten beim Erzeugen achsensymmetrischer Figuren werden oft unterschätzt, insbesondere dann, wenn die Achse zwischen den Nägeln verläuft, so dass „halbe" Maschen zu zählen sind. Außerdem müssen die Lernenden die Eigenschaften der Achsenspiegelung soweit kennen, dass sie in zur Achse senkrechter Richtung zählen müssen. Diese Schwierigkeiten treten oft nicht zu Tage, wenn die Lage des Brettes und die der Achse nicht variiert werden. Es sind auch Aufgaben zu stellen, in denen die Achse auf der nicht markierten Diagonale des Brettes oder parallel zu dieser liegt.

Entsprechendes gilt für das Ergänzen oder Skizzieren symmetrischer Figuren auf kariertem Papier.

Nur selten werden symmetrische Körper aus Steckwürfeln gebaut oder durch schnelles Drehen ebener Figuren als Rotationskörper erzeugt, da der Aufwand als zu hoch eingeschätzt wird.

2.1.3 Anwenden von Symmetrie

In der Figurenlehre erschließen Symmetrien die Eigenschaften von Figuren. Da beim Falten eines Rechtecks die gegenüberliegenden Seiten aufeinander fallen, erkennt der Grundschüler, dass sie in seiner Sprache gleich groß sind, ohne dass der Begriff Länge bereits eingeführt ist. Entsprechendes gilt für Winkel.

Ein reiches Übungsfeld liefern Färbungsprobleme. Beim Abzählen gefärbter Objekte bestimmen Symmetrien, welche der gefärbten Objekte als verschieden betrachtet werden.

Beispiel 2.5 *Sechs nebeneinander liegende Garagentore sind mit den Nummern 7 bis 12 gekennzeichnet. Auf wie viele Arten können sie mit den Farben rot oder blau angestrichen werden?*

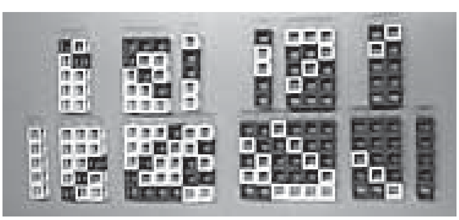

Abb. 5: Quader aus 5 Steckwürfeln

Beispiel 2.6 *Fünf Würfel, die schwarz oder weiß gefärbt sind, werden zu einem Quader zusammengesteckt. Wie viele verschiedene Quader kannst du bauen?* (*s.* **Abb. 5**).

Beispiel 2.7 *Wie viele verschiedene Würfel kannst du aus sechs Constri-Plättchen und Stäben bauen? Die Plättchen sind rot oder blau, die Stäbe immer weiß.*

Im Beispiel 2.5 sind die Objekte auf eine natürliche Art unterschieden, so dass keine Symmetrien zu berücksichtigen sind.

Beim Zusammenstecken der Quader oder Würfel und Hinlegen auf einen Tisch merken Lernende sehr schnell, dass manche Quader oder Würfel nach einer Drehung um eine Achse gleich aussehen. Der Vorteil der Quader und Würfel besteht darin, dass sie als Ganzes handhabbar sind, und noch nicht Begriffe, wie Ebenen- oder Drehsymmetrie, eingeführt werden müssen. Zwei Quader oder Würfel sind nicht verschieden, wenn man sie so hinlegen kann, dass sie gleich aussehen. Im Beispiel 2.6 kann man die Steckwürfel durch Plättchen ersetzen, die zu Streifen aneinander zu legen sind. Die Erfahrung hat gezeigt, dass manche Lernende nicht an eine Halbdrehung eines Streifens oder an eine Spiegelung an einer Querachse denken.

Der Übergang zur ikonischen Ebene bedeutet eine Abstraktion und sollte erst durchgeführt werden, wenn die bisherigen enaktiv gefundenen Lösungen protokolliert werden sollen.

Als weitere Symmetrieoperation im übertragenen Sinne liegt der Farbtausch nahe. Schließlich kann man Bewegungen und Farbtausch kombinieren. Dabei kann man Objekte finden, die nach einer Bewegung und einem anschließenden Farbtausch (oder umgekehrt) wieder genau so ausschauen wie vorher.

Zahlreiche Variationen der Beispiele sind möglich. Nahe liegend ist, die Anzahl der Farben oder die Art der gefärbten Objekte zu ändern. Man kann Teile ebener Figuren färben, die durch eine symmetrische Aufteilung der Figur entstanden sind.

Beispiel 2.8 *In* ***Abbildung 6*** *ist der Bruch $\frac{3}{8}$ nur zweimal verschieden veranschaulicht. Erläutern Sie diese Aussage. Finden Sie in beiden Unterteilungen des Quadrats alle verschieden Veranschaulichungen der Brüche $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$.*

Man kann die Markierungshandlung ändern. Von einer Postkarte werden Ecken abgeschnitten. Wie viele verschiedene Postkarten sind möglich? Dies ist ein zum Färben der Ecken oder Teilrechtecke eines Rechtecks isomorphes Problem. Entsprechend kann man Eckpyramiden von einem Würfel abschneiden.

Auf ein 3 3 3-Feld eines quadratischen Gitters werden Halma- oder Mühlesteine gestellt. Ein Muster bilden hier alle Stellungen, die nicht durch eine Drehung oder Spiegelung des Feldes ineinander übergehen.

Wie viele verschiedene Dreiecke oder Vierecke kann man auf einem *n* 3 *n* – Geobrett spannen? Eine zusätzliche Herausforderung entsteht hier dadurch, dass Dreiecke oder Vierecke auf zwei mathematisch interessante Arten als nicht verschieden betrachtet werden können.

Einmal werden kongruente Dreiecke als nicht verschieden betrachtet. Deren Anzahl zu bestimmen, ist eine schwierige und für mehr als 4 Nägel pro Seite des Brettes ungelöste Aufgabe. Als Alternative werden Dreiecke als nicht verschieden betrachtet, die nur durch Drehungen oder Spiegelungen des Brettes ineinander übergeführt werden können.

Als Bausteine für die sogenannten *n*-Ominoes werden jeweils kongruente regelmäßige 3, 4, 6-Ecke genommen, die jeweils mit einer ganzen Seite aneinander zu setzen sind. Im Raum werden Würfel ganzflächig an einander gesetzt. Wie viele verschiedene Formen sind möglich? Obwohl die Anzahlen der ebenen und räumlichen *n*-Ominoes für beliebiges n nicht bekannt sind, haben sich Aufgaben mit bis zu 6 Teilen sehr bewährt, um das Zählen

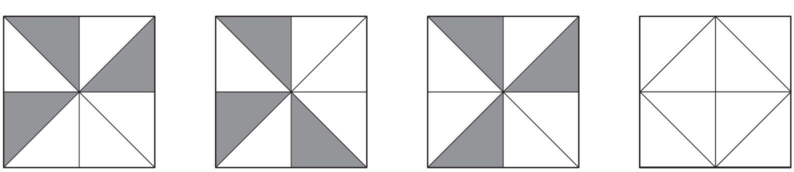

Abb. 6: Veranschaulichungen von $\frac{3}{8}$

bei Symmetrieeinfluss und heuristische Strategien zu schulen, wie das Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen. Allerdings werden auf der 1. Stufe die Abzählungen nicht immer vollständig durchgeführt, sondern man beschränkt sich auf das Finden möglichst vieler verschiedener Lösungen, da der Nachweis, dass man alle Lösungen gefunden hat, sehr viel strategisches und geometrisches Wissen erfordern kann. Dies erkennt man auch daran, dass für die genannten Färbungsprobleme Anzahlformeln, aber nur wenige Algorithmen bekannt sind, die alle Muster konstruieren, soweit dies mit vernünftiger Effizienz (Zeit und Speicherplatz) möglich ist. Ein Algorithmus zum Halskettenproblem findet sich in (Gray 1998).

Zusammenfassung: Die Lernenden sammeln Erfahrungen zu den Kongruenzabbildungen und Symmetrien zum einen unter einem statischen Aspekt, indem sie vorgegebene Formen und Muster in der Umwelt und an vom Lehrer vorgegebenem Material analysieren. Zum anderen unter einem dynamischen Aspekt, indem sie physikalische Bewegungen als Repräsentationen von Abbildungen durchführen und analysieren, Mustern durch Bewegen von Teilen des späteren Gesamtmusters erzeugen und Muster abzählen. Hierbei sind Muster Klassen von Objekten, die bei der Wirkung von Kongruenzabbildungen äquivalent sind. Die Eindeutigkeit und die Eigenschaften der Abbildungen wird aufgrund der physikalischen Repräsentation intuitiv erfasst.

2.2 2. Stufe: Der Begriff als Träger von Eigenschaften

Während auf der 1. Stufe der dynamische Aspekt betont wurde, wird jetzt der statische Aspekt stärker zu betont, um das Begriffsverständnis der Lernenden der mathematischen Sichtweise einer Abbildung als statische Zuordnung ohne zeitliche Komponenten und ohne physikalische Bewegungsvorgänge anzunähern.

In der Vergangenheit wurde häufig zu schnell zu dieser Sichtweise übergegangen und man verbot Lernenden anschauliche Vorstellungen, die mit dem Bewegen von Teilmengen (Strecken, Figuren, …) der Ebene verbunden sind. Stattdessen strebte man frühzeitig die Sichtweise der Abbildung der ganzen Ebene an, ohne dass die Lernenden einsahen, wozu dies gut ist, da die meisten Anwendungsaufgaben zu Kongruenzabbildungen mit dem Bewegen einzelner Figuren richtig gelöst werden können.

Auf dieser Stufe sind Eigenschaften der Kongruenzabbildungen und der Symmetrien zu erfassen, in definierende und zu folgernde Eigenschaften aufzuteilen und in Konstruktionen und bei Berechnungen anzuwenden.

Als didaktische Maßnahmen bieten sich an: Von der enaktiven Repräsentation werden die Eigenschaften abgelesen und als Grundtatsachen fixiert. Der Gebrauch enaktiver Repräsentationen (Spiegel, Transparentpapier, Falten) wird zurückgedrängt zu Gunsten einer zeichnerischen Behandlung. Hier bietet sich der Einsatz von DGS an.

In einer Analyse des geometrischen Zeichnens werden die beteiligten Abbildungen (Bewegungen) herausgestellt. Eine Parallele zu einer Geraden g wird als das Bild von g unter einer Translation gesehen. Es kommt nur auf die Anfangs- und Endlage der Geraden, also z. B. der Kante des Geodreiecks an. Wie die Kante aus der Ausgangslage in die Endlage gelangt interessiert nicht. Dabei wird der statische Abbildungsbegriff als Zuordnung der Punkte der Ebene entwickelt, indem die Lernenden erkennen, dass jedem Punkt der Ebene genau ein Bildpunkt zugeordnet ist, und dass der „Weg“ von Punkt zu Bildpunkt für den statischen Abbildungsbegriff völlig belanglos ist, dass aber eine anschauliche Vorstellung hilft, Aufgaben zu lösen.

Die Lernenden können unterscheiden zwischen Abbildung und Bild bzw. zwischen physikalischer Realisierung und mathematischer Zuordnung.

Sie erwerben die Fähigkeit, den Abbildungstyp aufgrund einer vorgelegten Merkmalsmenge zu bestimmen. Hierbei werden aber noch keine Bezüge oder Vergleiche zu anderen Kongruenzabbildungen hergestellt.

Sie nutzen die Eigenschaften der Abbildungen, um aus einem Figurenpaar den zugehörigen Abbildungstyp zu bestimmen, indem sie entweder die Bestimmungsstücke der Abbildung konstruieren oder hinreichende Bedingungen angeben.

Sie beschreiben Unterbegriffe mit Beispielen und Gegenbeispielen, z. B. Verschiebungen längs einer Geraden, Halbdrehungen um einen Punkt ohne Gebrauch des Gruppenbegriffs.

Sie bestimmen alle Deckabbildungen einfacher ebener Figur und Körper und benutzen sie, um Beziehungen zwischen Figurenmengen aufzustellen, z. B. Viereckssystematik.

Für Abzählprobleme wie in Beispiel 2.6 wird eine Formel entwickelt, indem man für kleine Anzahlen der Würfel n [$\{3, 4, 5, 6\}$, alle 2^n möglichen Stangen baut und dann die Stangen nach Anzahl der schwarzen Würfel systematisch anordnet (vgl. **Abb. 7**). Dabei wird etwa erkannt, dass die nicht achsen- oder ebenensymmetrischen Stangen genau zweimal, die symmetrischen dagegen nur einmal vorkommen. Legt man also die symmetrischen Stangen noch einmal hin, dann sind alle Stangen doppelt vorhanden, werden also zweimal gezählt. Somit ergibt sich die Anzahl V der verschiedenen Muster aus der Anzahl *A* aller Muster und der Anzahl *S* der symmetrischen Muster.

$$2 \cdot V = A + S \qquad (1)$$

Die symmetrischen Muster enthalten auf zur Achse bzw. Ebene symmetrischen Positionen Objekte gleicher Farbe. Somit können $\frac{n}{2}$ Objekte auf 2 Arten gefärbt werden. Bei ungeradem *n* können das Achsenfeld bzw. der von der Symmetrieebene geschnittene Würfel zusätzlich auf zwei Arten gefärbt werden. Somit folgt aus (1)

$$V = 2^{n-1} + \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}-1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2^{\frac{n}{2}} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (2)$$

Auf der zweiten Stufe sind bei einem abbildungsgeometrischen Aufbau der Elementargeometrie auch die typischen abbildungsgeometrische Beweise für den Winkelsummensatz, geometrische Örter, Transversalen im Dreieck, PYTHAGORAS, THALES-Satz, Peripheriewinkel-Satz, … und exemplarische, nicht systematische Verkettungen von Kongruenzabbildungen einzuordnen.

2.3 3. Stufe: Der Begriff als Teil eines Beziehungsnetzes

Die Lernenden erfahren die Zusammenhänge zwischen Eigenschaften von Abbildungen, indem sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede vergleichen und in Ordnungsdiagrammen systematisieren. Der Vergleich von Invarianten und Fixelementen führt zu einer „horizontalen“ Ordnung. Das Ordnen nach gemeinsamen Merkmalen und Bilden von Unter- bzw. Oberbegriffen führt zu einer „ vertikalen“ Ordnung, indem etwa die gleich- und ungleichsinnigen Kongruenzabbildungen der Ebene als Untermengen der entsprechenden Ähnlichkeitsabbildungen erkannt werden.

Die Verallgemeinerung der Achsenspiegelung führt über die Schrägspiegelung zur Achsenaffinität und schließlich zur Zentralkollineation. Für eine systematische Behandlung der affinen Abbildungen der Ebene wird bei einer verkürzten gymnasialen Schulzeit keine Zeit sein.

Entsprechende Überlegungen kann man für den Raum anstellen.

Bei diesen Untersuchungen erwerben die Lernenden die Fähigkeit, spezifische Eigenschaften zu nennen, durch die ein Abbildungsbegriff zu einem Unter- bzw. Oberbegriff wird. Zusatzbedingungen führen zu Unterbegriffen, z. B. 180-Drehung, zu leeren Begriffen, z. B. gegensinnige Verschiebung, gegensinnige Drehung, gleichsinnige Spiegelung, oder zu keinen Einschränkungen, z. B. längentreue Verschiebung. Dabei setzen sie sich auch kritisch mit den Begriffen auseinander.

Eine kritische Auseinandersetzung mit einem Begriff beinhaltet, verschiedene Definitionen des Begriffs miteinander zu vergleichen, indem man untersucht, ob eine gegebene Definition minimal bzw. redundant ist, oder Eigenschaften in einer Definition durch andere ersetzt.

Darunter fällt auch, aus der Angabe einer Konstruktions- oder Zuordnungsvorschrift, z. B. für eine Achsenspiegelung über die Mittelsenkrechte, eine analytische Definition abzuleiten, oder eine Abbildung durch Spezifikation aus einem Oberbegriff zu gewinnen. Wenn eine Streckung als eine Dilatation mit Fixpunkt eingeführt wird, muss die Längenänderung zwischen Urbild und Bildstrecke bewiesen werden.

Bei den Abzählproblemen wird die Idee der *Mehrfachzählung*, die zu einer Lösung des Beispiels 2.7 führte, auf das Beispiel 2.8 übertragen, das das Zählen bei mehrfacher Achsen- und Drehsymmetrie zum Thema hat. An verschiedenartigen Beispielen wird man die gemeinsame Idee erarbeiten.

Das integrierte Verständnis eines Abbildungsbegriffes kann sehr weit gehen, je nachdem welcher Abbildungsvorrat vorhanden ist. Es wäre denkbar auch die Ähnlichkeiten schon in den Klassen 5 – 7 auf der 1. und 2. Stufe und dann in den Klassen 8 und 9 alle Ähnlichkeitsabbildungen gemeinsam auf der 3. Stufe zu behandeln. Entsprechendes gilt für Scherung, Schrägspiegelung, vertikale Achsenaffinität und Euler'sche Affinität in konstruktiver Behandlung – Ellipse als Stauchbild eines Kreises, Schrägspiegelung als Deckabbildung einer Parabel, Euleraffinität als Deckabbildung einer Hyperbel.

2.4 4. Stufe: Der Begriff als strukturierbares Objekt

Die Lernenden vertiefen ihre Kenntnis der Beziehungen, die durch das Verketten von Abbildungen gestiftet werden, indem sie das Verketten geometrischer Abbildungen formalisieren. Dazu gehört, dass zuerst eine geeignete Symbolik für die Abbildungen eingeführt wird, etwa, dass der Name des Objektes, z. B. P für einen Punkt, links von dem Namen der Abbildung, z. B. Σ_a für die Spiegelung an der Geraden a, steht, und dass die Reihenfolge der Abbildungen der Schreibfolge entspricht. Für die Operation Verketten wird ein eigenes Zeichen, z. B. $\circ$, eingeführt.

$$P \xrightarrow{\Sigma_a} P9 \xrightarrow{\Sigma_b} P0 :\Leftrightarrow P\, \Sigma_a \circ \Sigma_b = P0, \quad \mathrm{K} := \Sigma_a \circ \Sigma_b$$

Wenn die Möglichkeit besteht, die Zeichen für Objekte und Abbildungen aus verschiedenen Alphabeten zu nehmen, dann erleichtert dies die Übersicht und erspart die vielfach üblichen Klammern, wie bei der Schreibweise $S_a(P)$. Ein weiterer Vorteil ist, dass der Lernende die runden Klammern nicht in einer zweiten Bedeutung neben der in $a\,(b + c)$ erlernen muss.

Genauso wie das Verketten von Funktionen in der Algebra formalisiert wird, indem die Funktionsterme ineinander eingesetzt werden, geschieht dies für geometrische Abbildungen nach einer analytischen Beschreibung durch sogenannte Abbildungsgleichungen in der Sekundarstufe I bzw. durch *n*-Tupel und Matrizen in der S II. Natürlich bietet sich hier der Einsatz eines Computeralgebrasystems an, wie bei den Funktionen in der Algebra. Eine umfassende Analyse eines solchen Einsatzes findet sich in (WEIGAND 1999).

Die weitergehende strukturierte Kenntnis des Abbildungsbegriffs führt zu dem Begriff der Gruppe. Wenn auch dessen Behandlung wieder aus dem Schulstoff verschwunden ist, und zur Zeit auch nicht in didaktischen Erörterungen diskutiert wird, sollten die Lehrenden Einblicke in dieses mathematische Hintergrundwissen gewinnen.

Abbildungsgruppen können zwar schon auf einem enaktiven Niveau mit angemessenen Verbalisierungen und enaktiven Repräsentationen erarbeitet werden, wie die Einführung der Deckabbildungen eines Quadrates durch das Arbeiten mit Würfelnetzen in (WALTER 1970) zeigt, aber die Frage nach einer bildungsträchtigen Fortsetzung konnte in der Vergangenheit nicht überzeugend beantwortet werden.

Auf der 4. Stufe des Begriffsverständnisses ist jedenfalls zu erwarten, dass die Lernenden die Fähigkeit erwerben, Verknüpfungstafeln für die Deckabbildungen regelmäßiger Vielecke und regelmäßiger Körper aufzustellen. Dabei benutzen sie die Darstellung der Kongruenzabbildungen als Produkte von höchstens drei Geradenspiegelungen in der Ebene und als Produkte von höchstens vier Ebenenspiegelungen im Raum.

Das Aussondern von Untergruppen durch Angabe der Bedingungen kann durch Anbringen von Verzierungen an Figuren und Körpern veranschaulicht werden.

Die Kenntnis wichtiger Gruppentypen umfasst die zyklischen und Diedergruppen der Ordnungen 3, 4, 5 und 6, sowie die Gruppe *W* der Drehungen und die Gruppe S aller Deckabbildungen eines Würfels, und schließt die Fähigkeit ein, für Abbildungsgruppen Mengen erzeugender Elemente anzugeben.

Das strukturelle Verständnis kann sehr weit gehen. Der Begriff Konjugation kann helfen, Abbildungen zu klassifizieren oder geometrische Aussagen durch Rechnen mit Abbildungen zu beweisen, indem Aussagen über Inzidenz und Orthogonalität in Gleichungen von Abbildungen übersetzt werden (vgl (JEGER 1962), (GUGGENHEIMER 1967)), (MARTIN 1987)). Die Aussage

$$\Sigma_A\ \Sigma_B\ \Sigma_C\ \Sigma_D = \mathrm{Id} \Leftrightarrow [\mathrm{A, B, C, D}] \text{ ist ein Parallelogramm}$$

beweist man, indem man die Punktspiegelungen durch Geradenspiegelungen ersetzt und den Dreispiegelungssatz anwendet.

Man kann die Erzeugbarkeit von Abbildungsgruppen aus gewissen Teilmengen untersuchen, wie etwa die Erzeugung der Gruppe der Kongruenzabbildungen im Raum aus Achsenspiegelungen in (JEGER 1968) oder die Erzeugung der affinen Gruppe durch Schrägspiegelungen in (ZIEGLER 1975). Solche Darstellungen haben den Nachteil, dass die vielen Fallunterscheidungen und die aufwändigen und unübersichtlichen Konstruktionen die Lernenden leicht ermüden. Der Vorteil liegt in der Beweisökonomie.

Man kann Symmetriegruppen als direkte oder semidirekte Produkte darstellen, wie die Diedergruppen in (ARTMANN 1977a) oder die Symmetriegruppen eines verzierten Balkens in ROHLFS 2001. Die Darstellbarkeit der affinen Gruppe als semidirektes Produkt behandeln (ARTMANN 1977b) und (HOLLAND 1982).

Der Nachweis von Isomorphismen und Homomorphismen klärt Zusammenhänge, z. B. für die Würfelgruppe wie in (KIRSCH 1964).

3 Zusammenfassung

Die Planung zeigt, wie sich der geometrische Abbildungsbegriff auf längere Zeit entwickeln könnte. In einer pragmatischen Unterrichtskonzeption wird man versuchen, die wichtigsten Anliegen dieses Modells in einer Unterrichtskonzeption zu verwirklichen, die die Stufen bestimmten Schuljahren zuordnet, etwa: 1. Stufe: 3. – 6. Klasse, 2. Stufe: 7. und 8. Klasse, 3. Stufe: 9. und 10. Klasse, 4. Stufe Verketten: 10./11. Klasse und Sekundarstufe II, 5. Stufe sonstiges: Studium.

Dieser Vorschlag beinhaltet einige inhaltliche Umstellungen, da alle Abbildungen insgesamt früher zur Verfügung stehen, aber auf einer niedrigeren Stufe. Aber diese inhaltliche Diskussion möchte ich jetzt eigentlich vermeiden, da ich die prinzipielle Auseinandersetzung mit einem Konzept, das psychologische, lerntheoretische Überlegungen gegenüber einem inhaltlich orientierten Konzept betont, für wichtiger erachte.

Hinzu kommt: Es muss etwas für den Geometrieunterricht getan werden, wenn er nicht wie bisher über die Köpfe hinweggehen soll. Die schlechtesten Kenntnisse haben unsere Studenten in Mittelstufengeometrie.

Literatur

ANDELFINGER, B. (Hrsg.) Geometrie, Didaktischer Informationsdienst. Mathematik Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, Soest 1988

ARTMANN, B. Diedergruppen, MPSB 24(1977a), S. 20 – 25

ARTMANN, B. (1977b) Die affine Gruppe der Ebene, MPSB 29(1982), S. 116 – 125

BENDER, P. Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion, ZDM 14 (1982), S. 9 – 24

BECKMANN, A. Zur didaktischen Bedeutung der abbildungsgeometrischen Beweismethode für 12 – 15jährige Schüler, Verlag Franzbecker, Bad Salzdetfuth 1989

BRANDMÜLLER, J. Zum Symmetriebegriff und seiner Bedeutung in Wissenschaft und Kunst, MU 35(1982), H. 1, S. 1 – 13

FIELD, M. GOLUBITSKY, M. Symmetry in Chaos, Oxford University Press 1992

FRANKE, M. Didaktik der Geometrie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin 2000

ENGEL, A. Problem Solving Strategies, Springer-Verlag, New York Berlin, Heidelberg 1998

GLASER, H.; SCHÖFFL, G. Ducci-Sequences and Pascal's Triangle, The Fibonacci Quarterly 33(1995) No. 4, S. 313 – 324

GLASER, H. Entdeckendes Lernen an Gleichungspyramiden, Mathematik lehren Nr. 96, Oktober 1999, S. 55 – 59

GLASER, H. Entdeckendes Lernen an Mustern aus Ziffernfolgen, in: Baptist, P. (Hrsg.): 2000 Mathematikunterricht im Wandel, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2000, S. 169 – 208

GOLDIN, G. A.(1980) McClintock, C. E. The Theme of Symmetry in Problem Solving, in: Krulik, S.; Reys, R. E. (Hrsg.): Problem Solving, in: School Mathematics 1980 Year Book, The National Council of Teachers of Mathematics 1980

GÖTZE, H. Castel del Monte Geometric Marvel of the Middle Ages, Prestel Verlag, Munich New York 1998

GRAY, J. W.(1988) Mastering Mathematica Programming Methods and Applications, Academic Press, San Diego 19942

GUGGENHEIMER, H. W. Plane geometry and its Groups, San Francisco 1967

KAHLE, D. Zur Rolle des Erlanger Programms im Geometrieunterricht, Math.Semesterber. 43(1996), S. 1 – 20

JEGER, M. Elementargeometrische Sätze als Abbilder von Gruppenoperationen, El. Math. 17(1962), S. 97 – 120

JEGER, M. Der Aufbau der Kongruenzgruppe im Raum durch Spiegelungen, El. Math. 23(1968), S. 1 – 24, S. 32 – 41

HOLLAND, G. Bemerkungen zum Aufbau der affinen Gruppe durch Verketten von Abbildungen, MPSB 29(1982), S. 116 – 125

KIRSCH, A. Über die Endomorphismen der endlichen Bewegungsgruppen und ihre Veranschaulichung, MPSB 11(1964), S. 48 – 70

KIRSCHE, P. Kongruenzabbildungen im Geometrieunterricht der Primarstufe, Verlag Franzbecker, Hildesheim 1992

KLEMM, M. Symmetrie von Ornamenten und Kristallen, Springer, New York 1982

LIND, D. Zur Rolle von Transparentpapier bei der Behandlung von Kongruenzabbildungen, MU 24(1978), S. 60 – 75

LOEB, K. Colour and Symmetry, Krieger, New York 1978

MARTIN, H. Transformation Geometry, Springer-Verlag, New York 1986

POLYA, G. How to Solve it, Princeton University Press 1945

ROHLFS, J. Die Symmetriegruppen verzierter Balken, Math.Semesterber. 48 (2001), S. 67 – 78

SCHATTSCHNEIDER, D. Visions of Symmetry, Freemann, New York 1990

SPEISER, A. Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Birkhäuser Verlag, Basel Stuttgart 1956

TARASSOW, L. Symmetrie, Symmetrie!, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin 1999

THOMPSON, D'Arcy on Growth and Form, Cambridge, Engl. and New York 1948

THOTH, F. Reguläre Figuren, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965

VOLLRATH, H.-J. Symmetrie und Verwandtschaft in der Abbildungsgeometrie, MU 24(1978), H. 2, S. 6 – 19

VOLLRATH, H.-J. Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht, Klett, Stuttgart 1984

VOLLRATH, H.-J. Algebra in der Sekundarstufe, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin 2003

WALTER, M. Boxes, Squares and other Things, the National Council of Teachers of Mathematics 1970

WALTER, M. Annette Annette, Verlag, Wesel 1973

WALTER, M. Another, Another and More, Andre Deutsch Limited, London 1975

WEIGAND, H.-G. Eine explorative Studie zum computergestützten Arbeiten mit Funktionen, JMD 20(1999), H. 1, S. 28 – 54

WEYL, H. Symmetry, Princeton University Press 1952

WUSSING, H. Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969

ZIEGLER, T. Affine Spiegelungsgeometrie, MNU 28(1975), H. 2, S. 99 – 106