Tipps zum Probieren

Tipps zu Aufgabe 1 – 7

Die Zahl im obersten Stein nenne ich *f*.
Es kommt darauf an, systematisch zu probieren:
Nach Einsetzen einer ersten Zahl für *a* wird der Wert für *b*, *c* und *f* berechnet.
Der Wert für *a* wird vergrößert und es wird beobachtet, wie sich *b*, *c* und das oberste Ergebnis *f* ändern. Nähert sich *f* der erwarteten Zahl, dann vergrößere a weiter. Entfernt man sich mit dem errechneten Wert für *f* vom gewünschten Ergebnis, dann verkleinere a.
Beispiel zu Aufgabe 1 / leicht: $a = 1$ liefert $b = 4$, $c = 8$ und $f = 12$. Aber 18 ist gefordert, also ist der Wert für *f* zu klein. $a = 2$ führt auf $f = 14$. Das Ergebnis ändert sich in Richtung auf die Lösung $f = 18$. So kann man weiter *a* ändern bis das Ergebnis passt.
Ebenso funktioniert 1 / mittel und 1 / schwer.
Auch die Aufgaben 2 und 3 mit den drei Teilaufgaben können nach dem Verfahren gelöst werden: immer bewirkt ein größerer Zahlenwert für *a* eine Vergrößerung des Wertes für *f*, solange *a* nicht negativ ist!
In den Aufgaben 4 bis 7 kommt auch das Divisionszeichen vor. Da muss genauer auf die Wirkung von *a*-Vergrößerungen geachtet werden, sie können auch zu einer Verkleinerung von *f* führen.
Mit dem Probierverfahren lässt sich eine Lösung finden.

Tipps zur superschweren Aufgabe

8. Notiere viele Quadratzahlen und bilde untereinander Differenzen. Suche solche, die wieder eine Quadratzahl sind.

B. Versuche, alle sechs Zahlen der Lösung aus A mit derselben Zahl zu multiplizieren.

Lösungen zum Probieren

A Es ist eine Lösung gesucht. Es gibt manchmal mehrere.

1.	leicht	$a = 4$; $b = 7$, $c = 11$
	mittel	$a = 4{,}5$; $b = 7$; $c = 12$
	schwer	$a = 7{,}1$: $b = 8{,}8$; $c = 11{,}9$
2.	leicht	$a = 3$; $b = 6$; $c = 9$ oder $a = -3$; $b = -6$; $c = -9$
	mittel	$a = 2{,}5$; $b = 10$; $c = 17{,}5$ oder $a = -2{,}5$; $b = -10$; $c = -17{,}5$
	schwer	$a = 7{,}5$; $b = 9$; $c = 40{,}5$ oder $a = -7{,}5$; $b = -9$; $c = -40{,}5$
3.	leicht	$a = 8$; $b = 11$; $c = 56$
	mittel	$a = 11$; $b = 12$; $c = 33$ oder $a = -12$; $b = -11$; $c = -36$
	schwer	$a = 7{,}5$; $b = 8{,}7$; $c = 11$ oder $a = -12{,}2$; $b = -11$; $c = -8{,}7$
4.	leicht	$a = 2$; $b = 6$; $c = 1$; oder $a = -2$; $b = -6$; $c = -1$
	mittel	$a = 12$; $b = 0{,}5$; $c = 2$ oder $a = -12$; $b = -0{,}5$; $c = -2$
	schwer	$a = 1{,}2$; $b = 1$; $c = \frac{4}{15} = 0{,}2\overline{6}$ oder $a = -1{,}2$; $b = -1$; $c = -\frac{4}{15} = -0{,}2\overline{6}$
5.	leicht	$a = 8$; $b = 11$; $c = 2$
	mittel	$a = 0{,}5$; $b = 14$; $c = 7$ oder $a = 14$; $b = 0{,}5$; $c = 20{,}5$
	schwer	$a = 0{,}2$; $b = 100$; $c = 0{,}5$ oder $a = -0{,}5$; $b = -40$; $c = -0{,}2$
6.	leicht	$a \neq 0$ beliebig; $b = \frac{16}{a}$; $c = 5 \cdot a$
	mittel	$a = 0{,}4$; $b = 40$; $c = 2$ oder $a = -0{,}4$; $b = -40$; $c = -2$
	schwer	$a = 11{,}6$; $b = 17{,}4$; $c = 4$ oder $a = -11{,}6$; $b = -17{,}4$; $c = -4$
7.	leicht	$a = 8$; $b = 24$; $c = 12$
	mittel	$a = 12{,}4$; $b = 19{,}4$; $c = 4$ oder $a = -19{,}4$; $b = -12{,}4$; $c = -6\frac{8}{31} \approx -6{,}258$
	schwer	$a = -40$; $b = -20$; $c = -4$

8. Superschwere Aufgabe: Additionsmauer mit Quadratzahlen

Eine Lösung: untere Mauerreihe: 81, 144, 256; mittlere: 225, 400; obere: 625
Eine weitere: untere Mauerreihe: 324, 576, 1024; mittlere: 900, 1600; obere: 2500

Lösen der Gleichungen

1. leicht $2a + 10 = 18 \Leftrightarrow 2\,a = 8 \Leftrightarrow a = 4$
   mittel $2\,a + 10 = 19 \Leftrightarrow 2\,a = 9 \Leftrightarrow a = 4{,}5$
   schwer $2a + 6{,}7 = 20{,}7 \Leftrightarrow 2\,a = 14{,}2 \Leftrightarrow a = 7{,}1$

2. leicht $6\,a^2 = 54 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$ oder $a = -3$
   mittel $28\,a^2 = 175 \Leftrightarrow a^2 = 6{,}25 \Leftrightarrow a = 2{,}5$ oder $a = -2{,}5$
   schwer $6{,}48\,a^2 = 364{,}5 \Leftrightarrow a^2 = 56{,}25 \Leftrightarrow a = 7{,}5$ oder $a = -7{,}5$

3. leicht $8a + 3 = 67 \Leftrightarrow 8\,a = 64 \Leftrightarrow a = 8$
   mittel $3a^2 + 3a - 396 = 0 \Leftrightarrow a^2 + a - 132 = 0 \Leftrightarrow a = 11$ oder $a = -12$
   schwer $a^2 + 4{,}7a + 4{,}2 = 95{,}7 \Leftrightarrow a^2 + 4{,}7a - 91{,}5 = 0 \Leftrightarrow a = 7{,}5$ oder $a = -12{,}2$

4. leicht $6a^2 = 24 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$ oder $a = -2$
   mittel $0{,}25a^2 = 36 \Leftrightarrow a^2 = 144 \Leftrightarrow a = 12$ oder $a = -12$
   schwer $3{,}75\,a^2 = 5{,}4 \Leftrightarrow a^2 = 1{,}44 \Leftrightarrow a = 1{,}2$ oder $a = -1{,}2$

5. leicht $1{,}25\,a + 3 = 10 \Leftrightarrow 1{,}25\,a = 10 \Leftrightarrow a = 8$
   mittel $a^2 + 6{,}5a + 7 = 21a \Leftrightarrow a^2 - 14{,}5\,a + 7 = 0 \Leftrightarrow a = 14$ oder $a = 0{,}5$
   schwer $200\,a^2 + 60a - 20 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 0{,}3a - 0{,}1 = 0 \Leftrightarrow a = 0{,}2$ oder $a = -0{,}5$

6. leicht $16 \cdot 5 = 80$ – Jede Zahl ($\neq 0$) kann für a eingesetzt werden.
   mittel $16 = 100\,a^2 \Leftrightarrow a^2 = 0{,}16 \Leftrightarrow a = 0{,}4$ oder $a = -0{,}4$
   schwer $\frac{1{,}5}{2{,}9} \cdot a^2 = 69{,}6 \Leftrightarrow a^2 = \frac{69{,}6 \cdot 2{,}9}{1{,}5} \Leftrightarrow a = 11{,}6$ oder $a = -11{,}6$

7. leicht $3\,a = 2\,a + 8 \Leftrightarrow a = 8$
   mittel $7a + a^2 = 240{,}56 \Leftrightarrow a^2 + 7\,a - 240{,}56 = 0 \Leftrightarrow a = 12{,}4$ oder $a = -19{,}4$
   schwer $20 + a = 0{,}5a \Leftrightarrow a = 0{,}5a - 20 \Leftrightarrow 0{,}5a = -20 \Leftrightarrow a = -40$

8. Lösung der superschweren Aufgabe: Additionsmauer mit Quadratzahlen

   Eine Lösung: untere Mauerreihe: 81, 144, 256; mittlere: 225, 400; obere: 625.
   Eine weitere: untere Mauerreihe: 324, 576, 1024; mittlere: 900, 1600; obere: 2500

B. Hat man eine Lösung gefunden, z. B. wie oben, so erhält man beliebig viele, indem alle sechs Zahlen mit einer Quadratzahl multipliziert werden.

Ist der Quadratzahlfaktor 4, so ergibt sich die zweite Lösung oben:
untere Reihe: 324, 576, 1024; mittlere: 900, 1600; obere: 2500.

Mit der 9 als Faktor ergibt sich:
untere Reihe: 729, 1296, 2304; mittlere: 2025, 3600; obere: 5625.

Allgemein mit einer natürlichen Zahl n:
untere Reihe: $81 \cdot n^2 = (9\,n)^2$, $144 \cdot n^2 = (12\,n)^2$, $256\,n^2 = (16\,n)^2$
mittlere Reihe: $225 \cdot n^2 = (15\,n)^2$; $400 \cdot n^2 = (20\,n)^2$
obere Reihe: $625 \cdot n^2 = (25\,n)^2$