BERND WOLLRING

Über das Euklidische hinaus

Rechte Winkel – Konstruieren und Argumentieren jenseits von Zirkel und Lineal

LERNGRUPPE: 3. – 6. Schuljahr

IDEE: Konstruktionen mit Winkelhaken und Einschiebungen

Manch didaktischer Text zur Schulgeometrie bleibt zeitlos gültig, etwa der zu drei Gründen, geometrisches Denken zu fördern, von Heinrich Bauersfeld (1992). Der dort als zweites genannte Grund betrifft die Heterogenität bei Schülerinnen und Schülern, der dritte den Mangel an erfahrungsbasiertem Wissen bei Lehrkräften. Herausragend bedeutsam aber erscheint der erste Grund: „Das Ausbilden arithmetischer Begriffe hängt eng mit der Entwicklung geometrischer Grundvorstellungen zusammen. Damit verbinden sich veränderte Vorstellungen von den fundamentalen mathematischen Lehr-Lern-Prozessen“ (Bauersfeld, 1992). Aufgrund der rasanten Entwicklung bei der Software zur dynamischen Geometrie mag man mittlerweile substanzielle Fortschritte annehmen. Aber es bleibt die Frage, in welche Richtung genau eine Horizonterweiterung stattgefunden hat.

Andere Werkzeuge, andere Argumente

Ich erinnere dazu an einen faszinierenden Vortrag von Roland Stowasser 1981 in Darmstadt, der sich mit der auf die euklidische Geometrie fokussierten Sichtweise der Schulgeometrie auseinandersetzt, und der leider nur durch einen zornigen Kurztext dokumentiert ist (Stowasser, 1981). Dieser aber erscheint mir auch noch heute, 2014, für alle Schulstufen gültig:

> *„So sind die Lehrer in der Regel auf die total verengte Perspektive der Schulbücher angewiesen, die das reiche, in der Geschichte so vielfach beackerte Problemfeld der geometrischen Konstruktionen zu einem Exerzierfeld für Zirkel und Lineal entarten lassen. Schlimm ist, dass Oenopides‘ Zirkel-Lineal-Dogma unbefragt bleibt, und deshalb auch nicht erfahren wird, wie artifiziell die allein zugelassenen Lösungen sind und wie schwach die Gründe für die Abweisung anderer Lösungen. Rekursive Verfahren werden als kunstlose Probierverfahren disqualifiziert, und zwar wegen angeblich zu geringer Genauigkeit. Pergament als Werkzeug, Falten, Durchstechen, etc. taugt vielleicht für spätere Handwerker …“*
>
> (Stowasser 1981).

Roland Stowasser unterbreitete eine Horizonterweiterung über das euklidische Argumentieren hinaus durch die Idee des verwendeten Werkzeugs: Er demonstrierte Konstruieren und begleitendes Argumentieren, bei dem als einziges Werkzeug ein Winkelhaken zugelassen war (**Abb. 1**). Das Fazit: „Der Winkelhaken ist mindestens ebenso stark wie Zirkel und Lineal zusammen.“ (Stowasser, 1981)

Wir betrachten hier nur Winkelhaken, die rechte Winkel einschließen, und erkunden an vier Konstruktionen, welche Argumente das Handhaben dieses Werkzeugs nach sich zieht. Rechte Winkel erscheinen hier sowohl als Objekte als auch als Werkzeuge, die Konstruktionen weisen jedoch über rechte Winkel hinaus.

In vielen handwerklichen Berufen werden nicht nur „euklidische Werkzeuge“ wie Zirkel und Lineal verwendet, schon gar nicht in der reinen „skalenlosen“ Form. Etliche Berufe nutzen den Winkelhaken: Als „Anschlagwinkel“ ist er bei Architekten, Schreinern und Zimmerleuten gewohntes Werkzeug. Er ist auch eines der Freimaurer-Symbole. Als „Spenglerwinkel“ nutzt man ihn im Metall verarbeitenden Gewerbe **(Abb. 2)**. Der Spenglerwinkel ist ein solider rechtwinkliger Winkelhaken aus Metall, der an seinem inneren Scheitelpunkt eine kleine Auskehlung besitzt, um einen Stift oder ein Schneidwerkzeug anzusetzen.

Konstruktionen mit rechtwinkligen Winkelhaken

Zugelassene Werkzeuge euklidischer Konstruktionen sind „Zirkel“ und „Lineal“. Genauer gesagt: Der „euklidische Zirkel“ ist zunächst „zusammenfallend“ gedacht. Und das „euklidische Lineal“ ist zunächst „skalenlos“ gedacht und erlaubt nur das Zeichnen von Geraden. Immerhin kann man mit diesem idealisierten Werkzeugsatz rechte Winkel zeichnen und gegebene Figuren an gegebenen Geraden spiegeln. Rechte Winkel kann man dann durch zueinander senkrechte Geraden kennzeichnen:

> *Zwei Geraden a und b sind genau dann zueinander senkrecht, wenn a beim Spiegeln an b auf sich selbst abgebildet wird.*

Aus einem Streifen bilden wir einen symmetrischen rechtwinkligen Winkelhaken **(Abb. 3)**. Zuerst entsteht der zum Rand senkrechte Knick, indem man „Rand auf Rand“ faltet, dann der Winkelhaken, indem man „Rand auf Knick“ faltet. Dann kürzt man die Schenkel auf gleiche Längen. Dieses

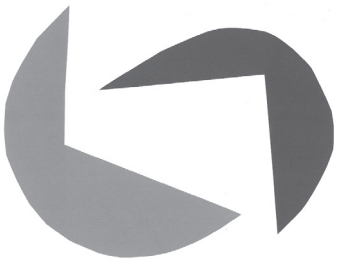
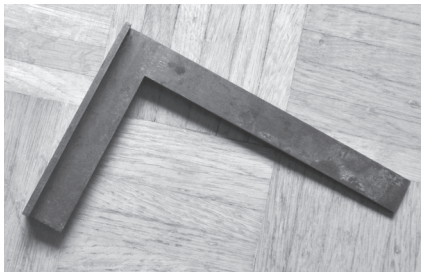
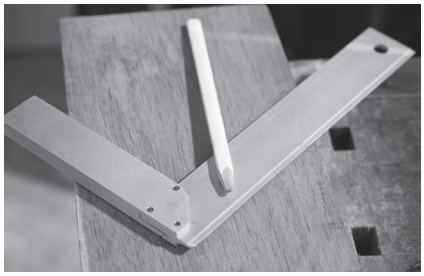


Abb. 1: Winkelhaken, wie sie R. Stowasser 1981 in Darmstadt verwendete



© Hans Walser



© contrastwerkstatt – Fotolia.com

Abb. 2: „Spenglerwinkel“ (links) und Anschlagwinkel sind übliche Werkzeuge im Handwerk

Werkzeug ermöglicht das Konstruieren eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks einschließlich der Hypotenuse bei Nutzen des Außenrandes und damit u. a. auch das Konstruieren eines regelmäßigen Achtecks **(Abb. 4)**. Die Konstruktion startet mit dem rechtwinkligen Kreuz innen. Dabei werden dessen Symmetrien nicht *a posteriori* als Eigenschaften erkundet, sondern *a priori* als Konstruktionsprinzipien investiert. Eine solche auf Symmetrie und mehrfachem kongruenten Kopieren basierende Konstruktion eignet sich für alle Schulstufen.

Der Winkelhaken zum rechten Winkel in **Abb. 3** und **Abb. 4** wird aus einer „Streifenschablone“ hergestellt (Wollring 2003). Streifenschablonen sind geknickte und ggf. mit Marken versehene gradlinige Streifen aus Karton, die ein skalenloses Messen und Kopieren von Strecken und Winkeln ermöglichen. Die Schülerinnen und Schüler können damit Dreiecke, regelmäßige Vielecke und nicht zu komplexe allgemeine Vielecke kopieren und in geforderte Lagen bringen (Wollring 2004). Lässt man diese Technik zu, so geht man bereits über die „euklidischen Optionen“ hinaus. Das wird im folgenden Abschnitt belegt, in dem mit Streifenschablonen auch andere Winkel als der Rechte gedrittelt werden.

Zunächst aber soll mit einer etwas ungewohnt erweiterten Schablone aus einem Geodreieck und einem daran befestigten Streifen, die im Kern aus einem rechtwinkligen T mit symmetrischen Skalen auf dem Querbalken besteht **(Abb. 5)**, ein gleichseitiges Dreieck konstruiert werden. Die Winkelskala wird dabei nicht verwendet. Die Spezialität liegt darin, dass eine „Einschiebe-Konstruktion“ vorliegt.

Die nicht euklidische Erweiterung der Konstruktionsmöglichkeiten besteht nun darin, dass man diese Schablone auf der Zeichenfläche beliebig bewegen und dabei in Lagen bringen kann, die durch bestimmte Bedingungen gekennzeichnet sind. Solche Konstruktionen heißen „Einschiebe-Konstruktionen“, sie gehen über die euklidischen Optionen hinaus.

Bei der Konstruktion in **Abb. 6** wird die Schablone so eingeschoben, dass die obere Kante des schwarzen Streifens eine Symmetrieachse bildet, welche den unteren rechten Eckpunkt des Quadrats auf einen Punkt seiner Mittellinie abbildet. Die untere Quadratseite und die linke vom Geodreieck abgedeckte Seite des inneren Dreiecks sind daher gleich lang. Die beiden so gezeichneten durchgezogenen Seiten sind gleich lang, weil auch die Linie in der Mitte des Quadrats eine Symmetrieachse ist. Der Basiswinkelsatz besagt dann, dass auch die drei Winkel des Dreiecks gleich groß sind, der Satz zur Winkelsumme im Dreieck liefert dann ihr Maß mit 60 °.

Das Herstellen des rechten Winkels und alle weiteren hier dargestellten Konstruktionen sind auch mit Papierfalttechnik zu realisieren. Die Geometrie des Papierfaltens geht ebenfalls über die euklidischen Optionen hinaus. Das kann hier nicht im Detail entfaltet werden, erwähnt sei aber, dass es Axiomensysteme zum Papierfalten gibt, die über das des Euklid hinausgehen (etwa Schmitt-Hartmann / Herget 2013, S. 156 ff.).

Dreiteilungen von rechten und anderen Winkeln

Das folgende Beispiel zeigt stellvertretend, wie am rechten Winkel Verfahren und Argumente „über das Euklidische

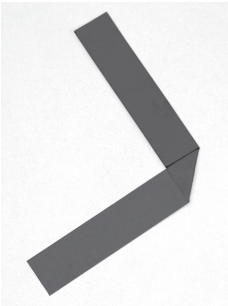


Abb. 3: Symmetrischer Winkelhaken zum rechten Winkel

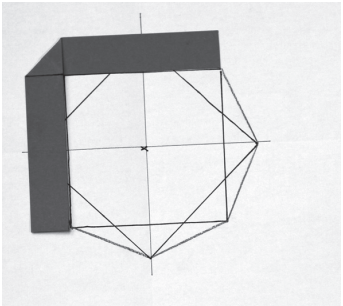


Abb. 4: Konstruktion eines regelmäßigen Achtecks mit einem symmetrischen rechtwinkligen Winkelhaken

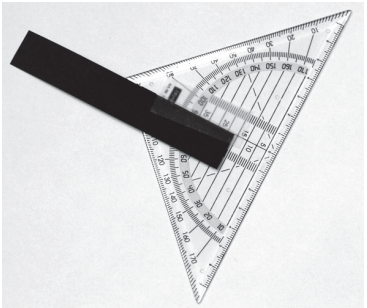


Abb. 5: Streifenschablone „T“: symmetrischer rechtwinkliger Winkelhaken mit Skalen

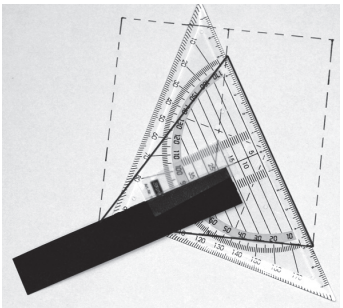


Abb. 6: Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit der Streifenschablone „T“ in drei Schritten

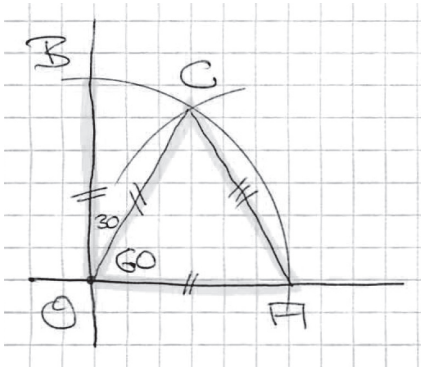


Abb. 7: Klassische Dreiteilung des rechten Winkels. Die mit // bezeichneten Strecken sind gleich lang.

hinaus“ entwickelt werden können, wenn man das Repertoire der zugelassenen Verfahren passend erweitert.

Mit Zirkel und Lineal im Sinne der Idee euklidischer Konstruktionen gelingt die Dreiteilung von Winkeln im Allgemeinen nicht, und zwar prinzipiell nicht (Wantzel 1837, zitiert nach Schmitz 2010a). Denn mit Zirkel und Lineal kann man nur Konstruktionen bewältigen, die dem Lösen von Gleichungen zweiten Grades entsprechen, und eine solche liegt hier nicht vor. Wohl aber gelingt die Lösung mit einer Einschiebe-Konstruktion.

Die klassische Winkeldreiteilung

Betrachten wir zunächst die bekannte Konstruktion zur Dreiteilung des rechten Winkels und sammeln die Argumente dazu, dass ein Winkel mit 30° gefunden wird **(Abb. 7)**: Der Winkel $w(BOA)$ sei ein Rechter, einbeschrieben ist der Kreis durch A und B mit Mittelpunkt O. Alle mit // bezeichneten Strecken haben dieselbe Länge, die des Radius. Der neu gezeichnete Kreis um A mit demselben Radius schneidet den ersten Kreis in C, die mit /// bezeichnete Strecke ist genauso lang wie der Radius //.

Der *Basiswinkelsatz* ergibt: Weil das Dreieck OAC drei gleich lange Seiten hat, sind auch seine drei Winkel alle gleich groß, also 60°, denn *der Satz zur Winkelsumme im Dreieck* besagt, dass diese 180° beträgt. Der Winkel $w(BOC)$ hat als *Ergänzung zu 90°* das Maß 30°, ein Drittel des rechten Winkels. Die zentralen Argumente (hier kursiv bezeichnet) sind sämtlich auf die euklidischen Axiome zurückzuführen.

Winkeldreiteilung mit einer Einschiebe-Konstruktion

Mit einer zweiten Konstruktion zur Dreiteilung des rechten Winkels erklären wir zunächst, was eine Einschiebe-Konstruktion ist und dann, wie man mit einer Einschiebe-Konstruktion auch andere als rechte Winkel dreiteilen kann. Dabei folgen wir weitgehend der schönen Darstellung von Michael Schmitz (2010a) und setzen lediglich einige zusätzliche erläuternde Akzente.

Wir betrachten einen Halbkreis um den Punkt O. Nun stellen wir uns eine Gerade vor, realisiert durch den Rand eines Kartonstreifens, und darauf zwei Punkte P und Q. Diese Gerade denken wir uns, gegeben durch den Streifen, in der Ebene beweglich. Die vielen möglichen Bewegungen grenzen wir ein, indem wir uns die Punkte P und Q an die Kreislinie so gebunden denken, dass sie nur auf dieser bewegbar sind und ihre Entfernung dabei, wie auf dem Streifen markiert, konstant bleibt. Zwei mögliche Lagen des Streifens zeigt **Abb. 8**.

Nun betrachten wir irgendeinen weiteren festgelegten Punkt R auf dem Streifen. Verschieben wir nun den Streifen nach links so, dass P und Q sich auf dem Kreis bewegen, so weit, bis der Punkt R auf der waagerechten Achse zu liegen kommt, so markiert er dort einen Ort, den wir nun mit S (wie „Schnittpunkt“) bezeichnen. Dieser Weg, einen bestimmten Punkt wie S zu finden, wird als *Einschiebe-Konstruktion* bezeichnet.

Entsprechend kann man sich auch eine Einschiebe-Konstruktion vorstellen, bei der R auf der waagerechten Geraden geführt wird und Q auf dem Kreis. Dann wird der Punkt P im Allgemeinen nicht auf dem Kreis liegen, abgesehen von möglicherweise einer bestimmten Lage, in der er dies doch tut.

Entscheidend ist, dass man sich die so geführte Bewegung des Streifens als Prozess vorstellen kann. Händisch auf dem Papier ist man nach einigen Übungen damit vertraut.

> Versucht man, die Einschiebe-Konstruktion etwa mit der Software *Euklid DynaGeo, Cabri* oder *Scetchometry* darzustellen, so stößt man auf Hindernisse. Klar, denn diese Software basiert auf euklidischen Konstruktionsprinzipien, damit sind Einschiebe-Konstruktionen im Allgemeinen nicht darstellbar. Allerdings sind diese Programme teilweise nicht in ganz „euklidisch konsequent“, sie enthalten etwa Module zum Zeichnen regelmäßiger Vielecke, einschließlich des Siebenecks.

Nun fehlt nicht mehr viel, um eine Einschiebe-Konstruktion zu beschreiben, die den rechten Winkel dreiteilt. Diese und die folgende allgemeine Konstruktion gehen wohl auf Archimedes zurück (Wikipedia 2014). Gegeben sei ein rechter Winkel mit Scheitelpunkt O und einem Kreis, der die beiden Schenkel in den Punkten A und B schneidet. Die Größe des Kreises ist unerheblich.

Auf dem Streifen werden die Punkte R und Q so markiert, dass die Länge $|s(RQ)|$ der Strecke $s(RQ)$ gleich dem Kreisradius ist. Nun wird der Streifen so bewegt, dass R auf der waagerechten Geraden und Q auf dem Kreisbogen geführt wird. Unter diesen Lagen wird genau diejenige durch Einschieben bestimmt, bei der die Gerade $g(RQ)$, der Streifenrand, durch B verläuft (**Abb. 10**). In der Praxis lässt sich diese Konstruk-

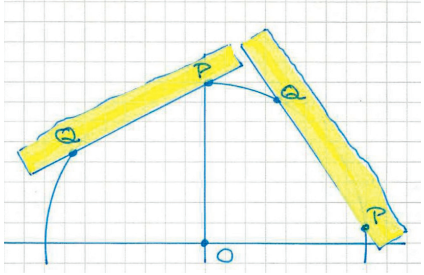


Abb. 8: Bewegen eines Streifens, geführt durch zwei an den Kreis gebundene Punkte

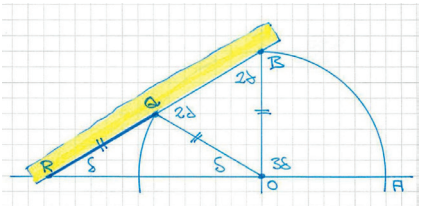


Abb. 9: Einschiebe-Konstruktion des Punktes S bei gegebener Lage der Punkte P, Q und R auf dem Streifen

tion auch mit einer gespannten Schnur realisieren, auf der man den Kreisradius als Entfernung von zwei Knoten markiert.

Diese spezielle Lage liefert die gesuchte Lösung: Das Maß des Winkels $w(BRA)$ ist ein Drittel des rechten Winkels $w(BOA)$. Das kann man durch Nachmessen belegen: Die Konstruktion „passt".

Mit ganz analogen Argumenten zu den schon genannten kann man sie begründen: Der Winkel $w(BRA)$ habe das Maß δ. Alle mit // bezeichneten Strecken sind gleich lang, so lang wie der Kreisradius. Das Dreieck ROQ ist demnach gleichschenklig, der Basiswinkelsatz und der Satz zur Winkelsumme im Dreieck liefern, dass der Winkel $w(OQR)$ das Maß $(180° - 2\delta)$ hat. Sein Nebenwinkel $w(BQO)$ hat dann das Maß 2δ. Auch das Dreieck QOB ist gleichschenklig, dieselben zwei Sätze liefern, dass sein Winkel $w(QOB)$ das Maß $(180° - 4\,\delta)$ hat.

Somit hat der Winkel $w(BOA)$ das Maß $180° - (180° - 4\delta) - \delta = 3\delta$. Er ist dreimal so groß wie δ. Sein Maß war als 90° vorgegeben, also hat der gefundene Winkel δ das Maß 30°, ein Drittel des gegebenen Winkels.

Mit denselben Argumenten wie zuvor, dem *Basiswinkelsatz*, dem *Satz zur Winkelsumme im Dreieck*, dem *Befund zu Winkelsummen* und eben dem entscheidenden Zusatz, das Einschieben als Konstruktion zuzulassen, findet man, dass der zum gegebenen Winkel $w(BOA)$ gefundene Winkel $w(BRA)$ ein Drittel des ursprünglichen Maßes hat (**Abb. 11**).

Diese Einschiebe-Konstruktion liefert nicht nur die Dreiteilung des *rechten* Winkels, sondern auch die Dreiteilung aller anderen Winkel im Bereich von 0° bis 135°. Bei 135° fallen der Punkt P auf dem Streifen und der Punkt B auf dem Kreis zusammen. Die Dreiteilung von Winkeln über 90° führt man auf die Dreiteilung von Winkeln unter 90° zurück.

Man findet die Dreiteilung des rechten Winkels auch mit einer Papierfalt-Konstruktion (ausführlich dargestellt bei Schmitz, 2010a). Es geht auch mit einem Winkelhaken (siehe da!) und einem damit verwandten Instrument namens „Tomahawk" (Wikipedia 2014). Der Kerngedanke bei Konstruktionen mit diesen Werkzeugen ist derselbe wie bei der hier dargestellten Konstruktion.

Nomografie mit dem Winkelhaken zum rechten Winkel

Nomografie bezeichnet die Technik, numerische Probleme mit Hilfe von Grafiken zu lösen: „*Gleichungen zeichnerisch lösen*" – so könnte man es auch vereinfacht und stark reduzierend nennen. Technisch bedeutsam war es vor allem zu einer Zeit, da Rechenmaschinen solche Aufgaben noch nicht so effizient lösen konnten wie heute. Typische nomografische Werkzeuge waren etwa logarithmisches Papier, in das man den Graphen einer Exponentialfunktion zu gegebenen Punkten in Form einer Geraden eintragen konnte; Kurvenscharen, zu denen Schnittpunkte zu bestimmen waren; Rechenschieber zum Multiplizieren usw.

Aber eine voreilig abschätzige Bewertung erscheint unangemessen. Mancher schnelle Algorithmus heutiger Maschinen basiert auf Argumenten, die aus der Verbindung von geometrischen und analytischen Schlussweisen entstanden sind, wie eben bei der Nomografie.

Mit einer solchen Konstruktion lösen wir das *Delische Problem der Würfelverdopplung*. Zur Vergegenwärtigung: Verdoppeln der Würfelkanten führt zur Vervierfachung der Oberfläche und zur Verachtfachung des Volumens.

Ein Würfel, dessen Volumen doppelt so groß ist wie das des Einheitswürfels, hat die Kantenlänge „dritte Wurzel aus 2", das ist die Zahl a mit $a^3 = 2$. Das *Delische Problem* besteht darin, eine Strecke dieser Länge $\sqrt[3]{2}$ zu konstruieren, wenn eine Strecke der Länge 1 gegeben ist. Auch dieses Problem ist mit den Verfahren der euklidischen Geometrie nicht zu lösen, wieder prinzipiell nicht (s. Wantzel 1837, zitiert nach Schmitz 2010b).

Wir starten mit einer Ähnlichkeitsidee (**Abb. 12**) und betrachten den rechtwinkligen doppelten Winkelhaken $ABCD$ und die Streckenlängen 1, x, y und z. Rechtwinklige Dreiecke werden durch ihre Höhe in zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke zerlegt, daraus folgt:

$x : 1 = y : x = z : y$, also

$x^2 = y$ und $y^2 = x \cdot z$, daher $x^3 = z$.

Dabei nutzen wir die Strahlensätze. Die Konstruktionen dazu sind allerdings unterschiedlich schwierig, je nachdem, ob man mit x startet und z sucht, oder ob man mit z startet und x sucht.

Zu den gegebenen Längen 1 und x findet man die Länge $z = x^3$ auf direktem Weg mit euklidischem Werkzeug: Konstruiere die Gerade $g(A, B)$, dazu die Senkrechte durch B, finde C, dann die Senkrechte zu $g(B, C)$, finde D. Fertig.

Ist jedoch zu gegebenen Längen 1 und z die Länge x gesucht, so ist ein

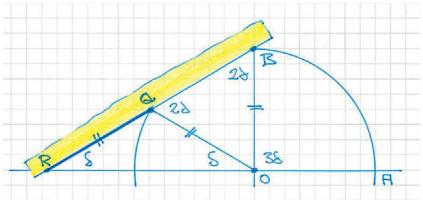


Abb. 10: Einschiebe-Konstruktion zur Dreiteilung des rechten Winkels

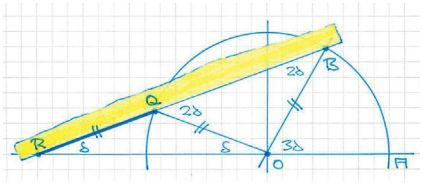


Abb. 11: Einschiebe-Konstruktion zur Dreiteilung eines beliebigen Winkels im Bereich [0°; 180°]

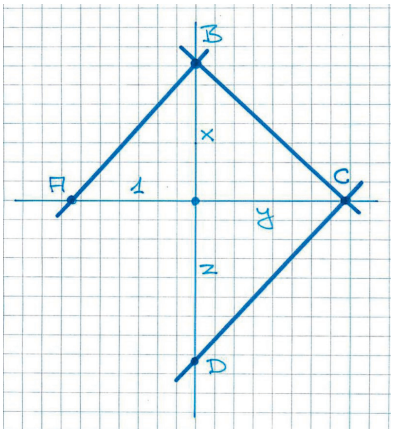


Abb. 12: Geführte Bewegung des ersten Winkelhakens, dargestellt sind zwei Lagen

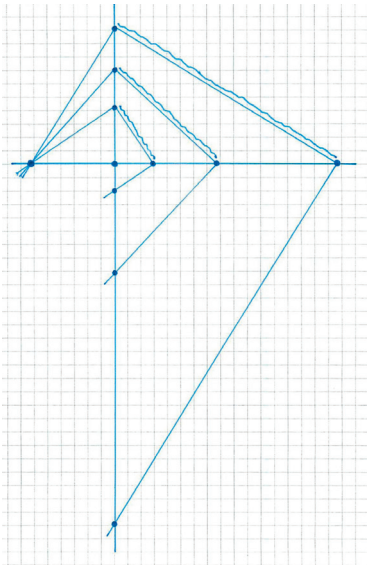


Abb. 13: Variationsskizze

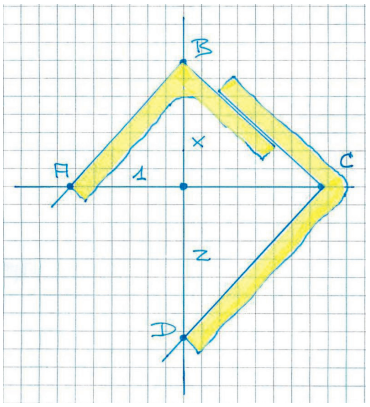


Abb. 14: Einschiebe-Konstruktion, beide Winkelhaken in zueinander passende Lage geführt

doppelter rechtwinkliger Winkelhaken folgendermaßen einzupassen:

1. *A* und *D* liegen an gegebenen Orten auf den Achsen und
2. liegen *B* und *C* irgendwo, aber auf den Achsen.

Dazu ist, wie die Variationsskizze in **Abb. 13** zeigt, die Länge der Strecke *s*(*B, C*) flexibel zu denken, etwa wie bei einem Gummiband oder einem Teleskop-Stab.

Dieses Einpassen gelingt nicht mehr mit euklidischem Werkzeug, es erfordert eine typische Einschiebe-Konstruktion: Michael Schmidt schlägt vor, zwei rechtwinklige Winkelhaken zu nutzen, die mit jeweils einem Schenkel aneinander verschiebbar sind, und dieses Paar durch Einschieben passend zu platzieren (**Abb. 14**, vgl. Schmidt 2010b). Bei praktischen Versuchen legt man den linken Winkelhaken besser so, dass sein oberer Schenkel nach links zeigt.

Startet man mit $z = 2$, so ist die gefundene Länge von x der gesuchte Wert „dritte Wurzel aus 2“. Ein praktischer Näherungswert für y ist 1,257.

> Der Kern dieser Konstruktion besteht darin, die Lage der Winkelhaken durch Einschieben zu finden.

Die Lösung des Delischen Problems ist auch mit einer Papierfalt-Konstruktion möglich (s. Schmitz 2010b), deren Kerngedanke derselbe ist wie bei der hier dargestellten Konstruktion.

Abschlussnotizen

Rechte Winkel erscheinen hier als Objekte und als Werkzeuge, die Konstruktionen weisen jedoch über rechte Winkel hinaus. Das Bewegen des „rechten Winkelhakens“ mit den genannten Bindungen erscheint anfangs ungewohnt, aber es schult die „Raumvorstellung“ im allgemeinen Sinn, hier die Kompetenz, ebene Figuren mental zu sehen und mental unter bestimmten wohldefinierten Bedingungen ändern zu können.

Das hier vorgestellte Bewegen des rechten Winkels erfordert ein gedankliches Dynamisieren von Konstruktionen, das Dynamische-Geometrie-Software nicht darstellen kann, wenn sie konsequent euklidische Geometrie modelliert. Mit Grafik-Programmen geht das schon eher, weil sie nicht den „euklidischen Beschränkungen“ unterliegen.

Der Wert euklidischer Geometrie als Denkschule zu axiomatisch basiertem Argumentieren bleibt unbestritten, aber für technische Belange sollte man darüber hinausgehen. Auch das ist notwendiger Schulstoff, Kompetenzbasis für jede Art von Ingenieurbildung. Sonst könnte man keine 2-Liter-Würfel herstellen und keine Zahnräder mit 11 Zähnen, und zumindest das zweite, wenngleich euklidisch nicht zu konstruieren, gibt es schließlich real existierend doch (**Abb. 15**).

Abb. 15: Zahnrad mit 11 Zähnen

„Zum Glück genügt ein Tagewerk Fortbildung, um Lehrer mit einem ihnen ungewohnten Werkzeug […] auf eine Erkundungsreise zu schicken, die sie in fruchtbare Situationen entdeckenden Lernens […] bringt“ (Stowasser 1981).

Anmerkungen

1 Besonderen Dank an Michael Schmitz aus Jena für seine ausgezeichneten schönen Anregungen im Rahmen von „Mathegami“.

2 Das Delische Problem ist auch mit einer Papierfalt-Konstruktion lösbar (Schmitz 2010a, Schmitt-Hartmann/Herget, 2013, S. 130 f.), deren Kerngedanke derselbe ist wie bei der hier dargestellten Konstruktion.

Literatur

Bauersfeld, H. (1992): Drei Gründe, geometrisches Denken in der Grundschule zu fördern. – In: Schumann, H. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 1992, S. 7 – 33.

Schmitt-Hartmann, R. / Herget, W. (2013): Moderner Unterricht – Papierfalten im Mathematikunterricht. Klett, Stuttgart, S. 5 – 12.

Schmitz, M. (2010a): Winkeldreiteilung. Mathegami, Mathematik – Origami – Unterricht. www.mathegami.de (Stand 22. 4. 2014).

Schmitz, M. (2010b): Würfelverdopplung. Mathegami, Mathematik – Origami – Unterricht. www.mathegami.de (Stand 22. 4. 2014).

Stowasser, R. J. K. (1981): Erkundung eines geometrischen Problemfeldes – mit den Augen eines Lehrers – In: Artmann, B. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 1981, S. 96.

Wikipedia (2014): http://de.wikipedia.org/wiki/Dreiteilung_des_Winkels, (Stand 22.6.2014)

Wollring, B. (2003): „Mit den Kindern Geometrie neu entdecken“. Kooperatives Design der Arbeitsumgebung „Streifenschablonen“ für den Mathematikunterricht in der Grundschule. – In: Baum M. / Wielpütz H. (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. Kallmeyer, Seelze.

Wollring, B. (2004): Streifenschablonen – Eine handlungsintensive Lernumgebung zu Kongruenz und Ähnlichkeit. – In: *mathematik lehren*, Heft 122, Friedrich Verlag, S. 9 – 14.