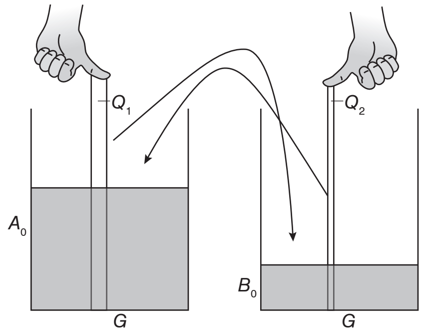
1 ZUM AUSPROBIEREN

Hin und Her – ein Experiment



Es stehen zwei Gefäße mit gleicher Grundfläche G auf dem Tisch, wobei in einem Wasser bis zur Höhe A_0 und im anderen bis zur Höhe B_0 steht.
Des Weiteren stehen zwei verschieden dicke zylindrische Glasröhrchen R_1 und R_2 zur Verfügung mit den Querschnitten Q_1 und Q_2.

Wasserhöhen ausgleichen?!
Nun können Sie in einem Experiment wiederholt für einen Austausch zwischen diesen beiden Gefäßen sorgen:
R_1 wird bis zum Boden in das erste Gefäß mit Wasserhöhe A_0, R_2 ins zweite Gefäß mit Wasserhöhe B_0 getaucht. Dann gibt man je einen Finger auf die Glasröhrchen, sodass man sie gefüllt aus den Gefäßen nehmen kann, und gibt die Inhalte in das jeweils andere Gefäß. Dann wiederholt man diesen Schritt noch einige Male: Immer mit R_1 vom ersten Gefäß ins zweite und mit R_2 umgekehrt (gleichzeitig).

Fragen:
Was passiert dabei langfristig mit den Wasserhöhen in den Gefäßen?
Kann man diese in einem mathematischen Modell voraussagen?
Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, hängt das Verhalten der Höhen langfristig ab?

samt ergibt sich daraus:

$$A_{n+1} = A_n + \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G}$$

und analog

$$B_{n+1} = B_n + \frac{Q_1 \cdot A_n - Q_2 \cdot B_n}{G}$$

bzw.

$$B_{n+1} = B_n - \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G}$$

Diese Formeln werden jetzt nur noch in geeignete Zellen geschrieben. „Herunterziehen“ zeigt, wo sich die Werte (Wasserhöhen) „stabilisieren“.

Für G, A_0, B_0, Q_1, Q_2 können die Schülerinnen und Schüler die Werte aus dem realen Experiment nehmen, oder auch erfundene Werte. Im Computerexperiment kommt es ja nicht mehr so sehr auf die konkrete Wahl an. Auch dickere Gefäße oder dünnere Glasröhrchen können modelliert werden, der Computer macht die vielen Wiederholungen auf Knopfdruck. So erhält man für $G = 1000$, $Q_1 = 8$, $Q_2 = 14$, $A_0 = 50$, $B_0 = 20$ ein Einpendeln der Höhen bei den Werten $44,\overline{54}$ und $25,\overline{45}$ (vgl. **Tab. 1**, S. 36). In der Tabellenkalkulation zeigt sich, dass die ersten beiden Nachkommastellen erst nach 320 Iterationen unverändert bleiben, d. h. diese Glasröhrchen und Gläser wären für ein reales Experiment nicht sehr gut geeignet.

Vermutlich wird man bei diesen Zahlenwerten noch nicht sehr viel entdecken. Klar sollte allerdings a priori sein, dass die Summe der beiden Höhen immer konstant ist (das Gesamtvolumen bleibt immer dasselbe und damit auch die Gesamthöhe).

Wenn man hier aber „rundere“ Verhältnisse bei den Querschnittflächen nimmt (etwa 1 : 2), so ergibt sich z. B. **Tab. 2** (die ersten beiden Nachkommastellen ändern sich nach ca. 230 Schritten nicht mehr). Hier springt schon das Verhältnis 2 : 1 bei den resultierenden Höhen ins Auge. Dies kann natürlich noch durch andere Werte auf Knopfdruck bestätigt werden. Bei einem Querschnittsverhältnis von 3 : 1 ergibt sich ein resultierendes Höhenverhältnis von 1 : 3 (**Tab. 3**).

Dies ist der entscheidende Vorteil von TK-Programmen beim Explorieren iterativer Situationen: Man kann viele Situationen in kurzer Zeit ausprobieren und zu folgender Vermutung kommen:

Das resultierende Höhenverhältnis ist reziprok zum Verhältnis der Glasröhrchenquerschnittsflächen.

Sowohl die dahinter liegende Mathematik als auch die nötigen TK-Kenntnisse bleiben auf relativ elementarem Niveau, so dass diese Aufgabe auch selbstständig bearbeitet werden kann.

Die Frage nach dem *Warum* dieses Einpendelns der Werte (Höhen) ist hier in ganz natürlicher Weise gegeben (Begründungsbedürfnis, Motivation): *Falls* sich die Werte A_n bzw. B_n der Höhen in den Gefäßen irgendwann nicht mehr ändern, sich also bei Werten A^* bzw. B^* eingependelt haben, dann muss ja $A_{n+1} = A^* = A_n$ gelten und somit:

$$A^* = A^* + \frac{Q_2 \cdot B^* - Q_1 \cdot A^*}{G}$$
$$\Leftrightarrow Q_2 \cdot B^* - Q_1 \cdot A^* = 0.$$

Natürlich ist hier auch die Interpretation mit den Volumina besonders wichtig, nicht nur die algebraische Handhabung. Der sich beim stationären Zustand ergebende Zusammenhang $A^*{:}B^* = Q_2{:}Q_1$ ist nicht verwunderlich und auch dann zu verstehen, wenn man gar nicht mehr an die Terme, sondern nur noch an die reale Situation denkt: Bei einem weiteren „Austauschschritt“ sind dann eben die ausgetauschten Volumina $Q_2 \cdot B^* = Q_1 \cdot A^*$ identisch (das ist das Charakteristische am stationären Zustand). Trotz der scheinbar sehr einfachen Verhältnisse ist hier vielleicht insgesamt etwas Unterstützung durch die Lehrkraft nötig und angebracht.

Begründungen und Beweise für die Konvergenz

In leistungsstärkeren und theoretisch interessierten Klassen kann man noch Konvergenzuntersuchungen anstellen, d. h. die Konvergenz auch beweisen und nicht nur erahnen. Genau genommen ist die obige Überlegung natürlich kein Konvergenzbeweis, wir haben ja nur gesagt: *Wenn* die Höhen konvergieren, dann müssen sie das zu einer Situation tun, in der $A^* : B^* = Q_2 : Q_1$ gilt, aber *ob* die Höhen immer konvergieren müssen, ist dadurch natürlich noch nicht belegt.

2 WISSENSWERTES

Drei Wege, um die Konvergenz zu zeigen

1. Weg
Wir verwenden die ursprünglichen Iterationsformeln für die Höhen A_n bzw. B_n („gekoppeltes System von Differenzengleichungen")

$$A_{n+1} = A_n + \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G},$$
$$B_{n+1} = B_n - \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G} \qquad (1)$$

und wenden ein induktives Argument an: Wir haben das streng monotone Fallen von (A_n) gezeigt, wenn $A_1 < A_0$ gilt, und wir die „Erblichkeit" dieser Kleinerbeziehung zeigen können: $A_{n+1} < A_n \Rightarrow A_{n+2} < A_{n+1}$ (2)
[Analog könnte es sich um ein streng monotones Wachsen handeln:
$A_1 > A_0$ und $A_{n+1} > A_n \Rightarrow A_{n+2} > A_{n+1}$.]
Zunächst gilt $A_{n+1} < A_n \Leftrightarrow Q_2 \cdot B_n < Q_1 \cdot A_n \Leftrightarrow \frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_n}{B_n}$.
Für (2) haben wir also zu zeigen:
$\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_n}{B_n} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$.
In die zu beweisende Ungleichung $\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$ setzen wir für A_{n+1} bzw. B_{n+1} die Iterationsformeln ein:

$$\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_n + \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G}}{B_n - \frac{Q_2 \cdot B_n - Q_1 \cdot A_n}{G}}$$

Diese Ungleichung ist äquivalent (wenige Umformungen) zu
$B_n Q_2(G - (Q_1 + Q_2)) < A_n Q_1(G - (Q_1 + Q_2))$.
Unter der realistischen Annahme $G > Q_1 + Q_2$ ist diese Ungleichung äquivalent zu $\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{A_n}{B_n}$, was ja laut Voraussetzung gilt.

Für den einzig realistischen Fall, dass die Gefäßgrundfläche größer als die Summe der beiden Glasröhrchenquerschnittsflächen ist (man wird kaum so kleine Gefäße bzw. so große Röhrchen haben, dass diese Bedingung nicht erfüllt ist), haben wir somit die (streng monotone) Konvergenz auch bewiesen.

Der andere Fall ($G \leq Q_1 + Q_2$) ist in der Realität nicht relevant und braucht in einem möglichen Unterricht nicht beachtet zu werden (es ergäbe sich hier nicht monotone, sondern oszillierende Konvergenz). Im Bedarfsfall sind mit den Möglichkeiten 2. und 3. (siehe unten) auch Wege zur Begründung der Konvergenz gegeben, die unabhängig von dieser Einschränkung sind und auch für den Fall $G \leq Q_1 + Q_2$ gelten.

2. Weg
Die gekoppelten Iterationsformeln (1) lassen sich auch leicht „trennen" und man kann einen Bezug zu „Linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten" herstellen:
Aus der ersten kann man wegen $B_n = H - A_n$ (mit H:= „Gesamthöhe") B_n eliminieren (durch A_n ausdrücken) und es ergibt sich:

$$A_{n+1} = A_n + \frac{Q_2 H - (Q_1 + Q_2) \cdot A_n}{G}, \qquad (3)$$

also eine Differenzengleichung der Form $A_{n+1} = c \cdot A_n + d$. In bekannter Art und Weise ergeben sich dafür Konvergenzkriterien und Grenzwerte, wenn man „Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten" kennt.

3. Weg
Auch wenn man nicht über das Wissen bei „Linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten" $A_{n+1} = c \cdot A_n + d$ verfügt, kann man in der „entkoppelten" Form (3) argumentieren, dass (A_n) konvergiert. Dies können Schüler/innen natürlich nicht alleine in selbständiger Arbeit leisten, sondern das bedarf der Unterstützung durch die Lehrkraft! Der einzig mögliche Grenzwert ist aus (3) leicht abzulesen:
$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{Q_2 H}{Q_1 + Q_2} =: A^*$. Mit $C_n := A_n - A^*$ ergibt sich nach wenigen Schritten, dass die Folge (C_n) eine geometrische Folge ist:

$$C_{n+1} = \underbrace{\left(1 - \frac{Q_1 + Q_2}{G}\right)}_{=:q} \cdot C_n.$$

Wegen $0 < Q_1 + Q_2 < 2G$ ist $|q| < 1$ garantiert und (C_n) damit eine Nullfolge. Daraus folgt unmittelbar $\lim_{n\to\infty} A_n = A^*$.