# Flugparabeln

*von Dietrich Meyer*

Flugparabeln spielen eine große Rolle in Natur und Technik. So ist es für Löschflugzeuge wichtig zu wissen, welche Bahn der abgeworfene Löschbeutel beschreibt, damit genauer Abwurf möglich ist. Bei Vulkanausbrüchen beschreiben ausgeworfene Felsbrocken ebenfalls Flugparabeln. Wovon hängen diese ab? Diese Fragestellungen behandelt der vorliegende Aufsatz, der in den Klassen 9/10 eingesetzt werden kann.

In den letzten Jahren erschienen im Sommer öfter in der Zeitung Berichte darüber, wie größere Waldbrände gelöscht wurden: Flugzeuge warfen Wasserbehälter auf den brennenden Wald. Hierbei muß der Pilot wissen, wann er von seinem Flugzeug aus den Wasserbehälter abzuwerfen hat. Muß dies vor dem Wald geschehen oder über dem Wald (**Abb. 1 a, b**)? Denn der Wasserbehälter hat im Moment des Abwurfs die Geschwindigkeit des Flugzeugs in waagerechter Richtung (nach Trägheitssatz der Mechanik, siehe **Kasten 1**). Wir legen daher ein Achsenkreuz mit dem Nullpunkt auf das Flugzeug (wie in **Abb. 1 c**) im Moment des Abwurfs. Hat das Flugzeug waagerecht die Geschwindigkeit v, so würde der Behälter in waagerechter Richtung aufgrund seiner Trägheit mit gleichbleibender Geschwindigkeit v weiterfliegen, er würde also den Weg $x = v \cdot t$ in der Zeit t zurücklegen. Nun greift aber gleichzeitig senkrecht nach unten der freie Fall an (**Kasten 1**). Dies ist eine gleichmäßig nach "unten" beschleunigte Bewegung, für sie gilt $y = \frac{-1}{2} \cdot g \cdot t^2$. (g bedeutet Fallbeschleunigung, siehe **Kasten 1**. Das negative Vorzeichen deutet nach Lage des Achsenkreuzes in **Abb. 1 c** den Weg abwärts an.) Welchen Weg beschreibt nun der Behälter insgesamt? Wir stellen noch einmal zusammen:

(1) $x = v \cdot t$ (waagerecht)

(2) $y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ (senkrecht nach unten)

Diese Bewegungen überlagern sich ungestört (Unabhängigkeitsprinzip in **Kasten 1**).

Aus (1) folgt $t = \frac{x}{v}$. Setzt man dies in (2) ein, so folgt

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v}\right)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{g}{2v^2} \cdot x^2.$$

Das ergibt eine einfache Parabelgleichung der Form $y = ax^2$. Die Parabel ist nach unten geöffnet, ihr Scheitel ist in Nullage. Der Streckfaktor ist

$$a = \frac{-g}{2v^2}$$

*Beispiel:* Das Flugzeug fliegt in der Höhe h = 500 m mit der Geschwindigkeit v = 180 km/h. Wieviel Meter vor dem brennenden Wald muß der Wasserbehälter abgeworfen werden?

Wir rechnen die Geschwindigkeit in m/s um und erhalten v = 50 m/s.

In der Gleichung $y = -\frac{g}{2v^2} \cdot x^2$ ist $|y| = 500$ m oder vom Flugzeug aus gesehen, y = -500 m. Lösen wir die Gleichung nach x bzw. $x^2$ auf, so folgt $x^2 = 500 \cdot 2 \cdot 2500/10$, also x = 500 m (g wurde hier mit rund 10 m/s² gerechnet). Genau 500 m vor dem brennenden Wald muß der Pilot den Behälter abwerfen. Das genaue Bild der Flugbahn zeig **Abb. 2** (s. **Tabelle 1**, wobei gilt:

## Kasten 1

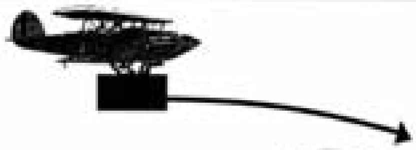


*Abb. 1a: Flugzeug über brennendem Wald*

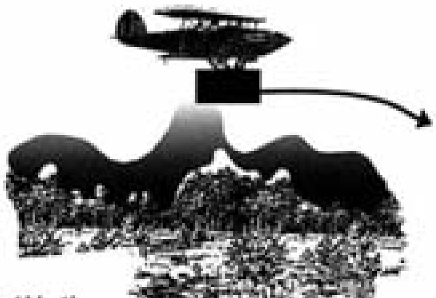


*Abb. 1b*

### Grundlagen der Bewegungslehre

**1. Trägheitssatz:** Ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung auf geradliniger Bahn.

**2. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:** Geschwindigkeit v bzw. Beschleunigung a sind definiert durch:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \text{bzw. } a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Es gelten das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $v = a \cdot t$ und das Weg-Zeit-Gesetz $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$.

**3. Freier Fall:** Der freie Fall ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, es gilt das Weg-Zeit-Gesetz: $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$, wobei g = 9,81 m/s² beträgt.

**4. Unabhängigkeitsprinzip:** Mehrere verschiedene Bewegungsformen eines Körpers überlagern sich ungestört.


*Abb. 1c: Koordinatenfestlegung*

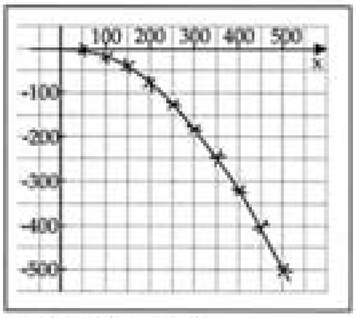



*Abb. 2: Flugparabel*

$x = 50 \cdot t$ (nach (1)) und $y = -0{,}002 \cdot x^2$).

Eine weitere Anwendung der Parabel ist der schiefe Wurf. Schiefe Würfe treten im Sport beim Schlagballweitwurf und Kugelstoßen auf, aber auch beim Speerwurf. In der Natur entstehen solche Würfe z. B. bei Vulkanausbrüchen, wenn Steine oder Lava (Lavafontänen) schräg nach oben gestoßen werden (**s. unten**). Allen diesen Vorgängen ist folgendes gemeinsam:

Wird irgendein solches "Geschoß" (Ball, Kugel oder Stein) schräg nach oben mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ weggestoßen, so stellen wir die Frage, welche Flugbahn es beschreibt. Der Abwurfwinkel sei $\varphi$ (**Abb. 3b**). In x-Richtung würde das Geschoß (gleichförmige Bewegung aufgrund der Trägheit) den Weg

(1) $x = v_0 \cdot t \cdot \cos\varphi$ beschreiben.

In y-Richtung wäre der Weg ohne Fallbeschleunigung $y^* = v_0 \cdot t \cdot \sin\varphi$. Doch überlagert sich dieser Komponente die Fallbewegung, für den Weg in y-Richtung gilt daher Gleichung

(2) $y = v_0 \cdot t \cdot \sin\varphi \; - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

Lösen wir Gleichung (1) nach t auf, so

folgt $t = \dfrac{x}{v_0 \cdot \cos\varphi}$ .

Einsetzen von t in Gleichung (2) ergibt dann

$$y = v_0 \frac{x}{v_0 \cdot \cos\varphi} \cdot \sin\varphi$$

$$-\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\varphi}$$

oder

$$y = \tan\varphi \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x^2,$$

da $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

Dies ist genau eine Parabel der allgemeinen Form $y = ax^2 + bx + c$, wobei hier $c = 0$ ist, $b = \tan\varphi$ und

$$a = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\varphi}.$$

Welchen Scheitelpunkt S mit den Koordinaten $x_s$ und $y_s$ (siehe **Abb. 3a**) besitzt diese Parabel? Dieser stellt den Gipfelpunkt der Flugbahn dar, ferner ist seine x-Koordinate $x_s$ gleich der halben Wurfweite $x_e$ (**Abb. 3a**). Eine Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ hat den Scheitel $S(x_s/y_s)$ mit

| Zeit t in sec | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | x gibt die waagerecht zurückgelegte Strecke wieder; y gibt die jeweilige Flughöhe an, vom Flugzeug aus nach unten gerechnet (siehe auch **Abb. 2**). |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = 50 \cdot t$ | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | |
| $y = -0{,}002 \cdot x^2$ | 0 | -20 | -80 | -180 | -320 | -500 | |

*Tabelle 1*

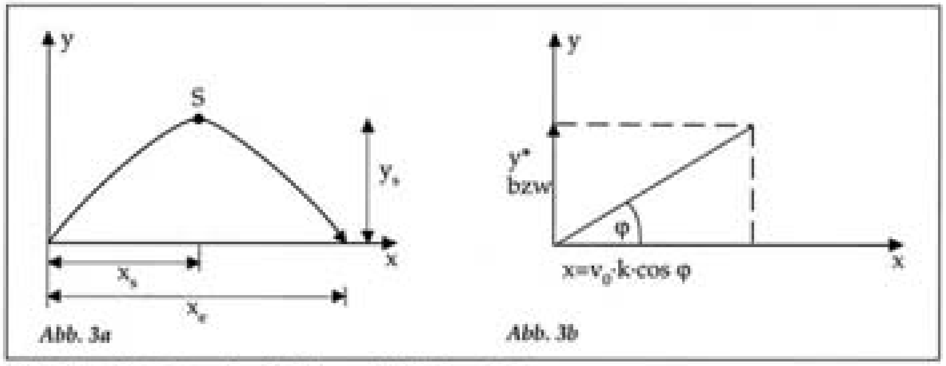



*Abb. 3a* *Abb. 3b*

*Abb. 3: Zur Herleitung der Gleichung der Wurfparabel*

$x_s = -\dfrac{b}{2 \cdot a}$ und $y_s = c - \dfrac{b^2}{4 \cdot a}$.

Hier folgt demnach

$$x_s = \frac{v_0^2}{g} \tan\varphi \cdot \cos^2\varphi$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi.$$

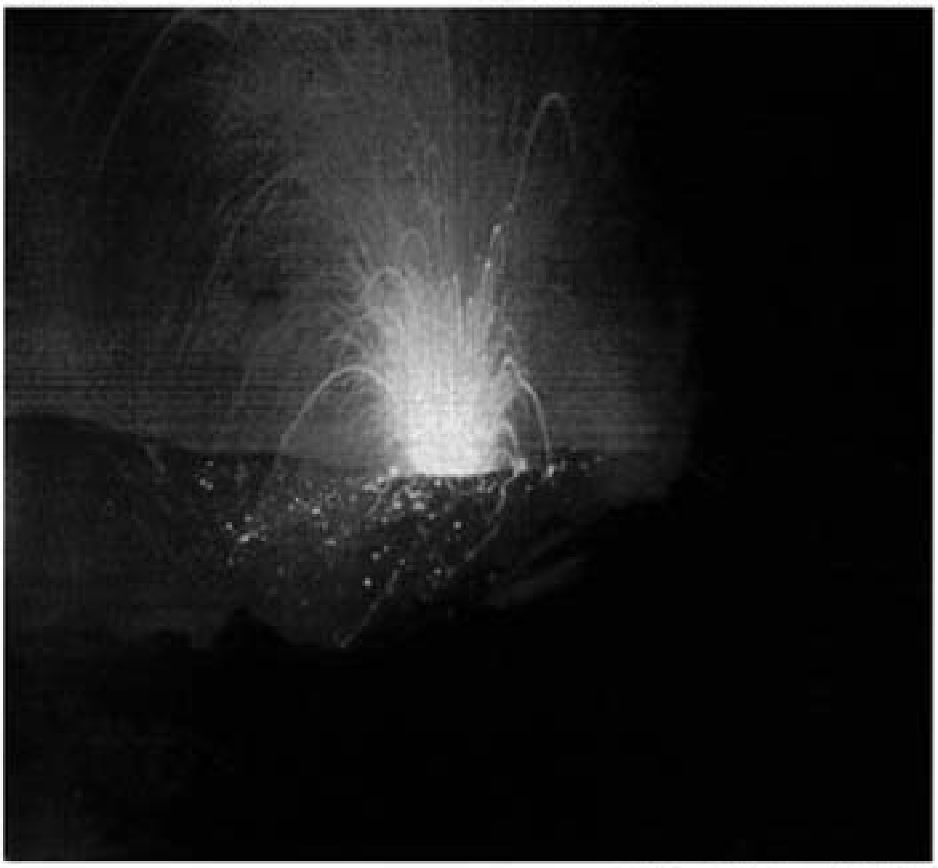
Dies ist die halbe Wurfweite, für die gesamte Wurfweite erhalten wird $x_e$ mit $x_e = 2\,[\frac{v_0^2}{g}] \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$. (Unter Verwendung des Theorems $2 \cdot \sin\varphi\cos\varphi = 2 \cdot \sin^2\varphi$ aus der Trigonometrie folgt $x_e = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi$, was die maximale Wurfweite bei $\varphi = 45°$ ergibt.).

Für die maximale Flughöhe $y_s$ gilt dann

$$y_s = \frac{\tan^2\varphi}{\dfrac{4g}{2v_0^2 \cos^2\varphi}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g}.$$

$$\tan^2\varphi \cdot \cos^2\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin^2\varphi.$$

*Beispiel:* Im Foto des Vulkanausbruchs beträgt die Geschwindigkeit eines Steines 170 m/s. Unter dem Winkel von $\varphi = 45°$ ergibt sich eine Flugweite $x_e = 2 \cdot 170^2/10 \cdot \sin 45° \cdot \cos 45°$, also $x_e$ = **2890 m**, sowie eine



***Vulkanausbruch des Vulkans Tobaltschik auf der Halbinsel Kamtschatka. Deutlich sind die Parabelformen der Flugbahnen der glühenden Felsbrocken zu erkennen, die mit der Geschwindigkeit von 170 m/s emporgeschleudert werden.***
*Quelle: Time-Life Buch "Vulkane" (Seite 11) aus der Serie "Der Planet Erde"; Time-Life, Amsterdam 1987*

Flughöhe von $y_s$ = **722,5 m** mit
$y_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{170^2}{2} (\sin 45°)^2$.

Zum Schluß eine weitere Anwendung von Flugparabeln: Satelliten beschreiben eine elliptische oder hyperbolische Bahn, in gewissen Grenzfällen auch parabelförmige. Die ist in **Kasten 2** kurz angedeutet.

**Aufgaben zu Flugparabeln**

**1)** Ein Löschflugzeug fliegt in 720 m Höhe über einem brennenden Wald mit Geschwindigkeit v = 60 m/s. Wie lautet die Gleichung der Flugparabel des Löschbehälters? Zeichne diese. Wieviel Meter vor dem Ziel muß der Löschbehälter abgeworfen werden?
*Lösung:* Flugparabel:
$y = -0{,}00139\ x^2$; Wurfweite 720 m.

**2)** Zum Vulkanausbruch: Wie weit und wie hoch fliegen Steine der Geschwindigkeit $v_0$ = 150 m/s unter den Abwurfwinkeln von $\varphi$ = 30°, 45° und 60°?
*Lösung:*
$\varphi = 30°$ : $x_e$ = 1948,5 m, $y_s$ = 281 m;
$\varphi = 45°$ ; $x_e$ = 2250 m, $y_s$ = 562,5 m;
$\varphi = 60°$ : $x_e$ = 1948,5 m, $y_s$ = 843,75 m.

## Kasten 2

Wenn Satelliten oder Kometen um den Zentralkörper kreisen (also z. B. Erde bzw. Sonne), so bewegen sie sich auf Bahnen, die im allgemeinen entweder elliptisch oder hyperbolisch sind, wobei im Brennpunkt jeweils der Zentralkörper steht. Dazwischen gibt es aber einen parabolischen Grenzfall bei einer bestimmten Geschwindigkeit $v_g$ (in **Abb. 4** gestrichelt gezeichnet). Allgemein gilt, wenn $v_1$ eine bestimmte (unten erläuterte) Geschwindigkeit ist, für die Geschwindigkeit v des Satelliten:

1) Ist $v < v_1$, so fällt der Satellit zur Erde zurück.
2) Gilt $v_1 < v < v_g$, so beschreibt der Satellit eine Ellipsenbahn (innerste Bahn in Abb. 4).
3) Ist $v = v_g$, so ist die Bahn parabolisch, der Satellit würde entweichen (gestrichelte Bahn in **Abb. 4**).
4) Ist $v > v_g$, so entweicht der Satellit auf einer Hyperbelbahn (äußerste Bahn in **Abb. 4**).

Für eine Flughöhe von 800 m über der Erde gilt: $v_1$ = 7450 m/s; $v_g$ = 10500 m/s;
$v_1$ bedeutet eine Mindestgeschwindigkeit.

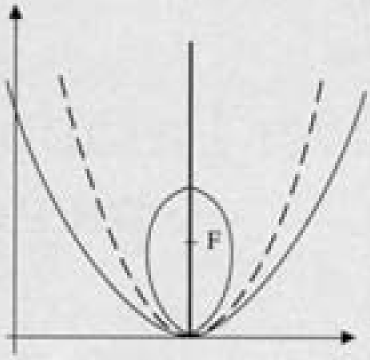


*Abb. 4*

Quelle: B. Rehberg