Bogenbrücken

– Ein Beispiel zu Parabeln in der Technik

von Ingo Weidig

In den Schulbüchern der 9 Klasse finden sich gelegentlich Aufgaben zu parabolischen Bogenbrücken. Dieses Beispiel von Parabeln in der Technik ergibt jedoch mehr als nur eine Aufgabe, es kann als Grundlage für ein vielschichtiges Unterrichtsprojekt dienen.

Die Brück' am Tay

"Wann treffen wir drei wieder zusammen?"
"Um die siebente Stund', am Brückendamm."
"Am Mittelpfeiler."
"Ich lösche die Flamm."
"Ich mit."
"Ich komme vom Norden her."
"Und ich vom Süden."
"Und ich vom Meer."

"Hei, das gibt einen Ringelreihn,
und die Brücke muß in den Grund hinein."

"Und der Zug, der in die Brücke tritt
Um die siebente Stund'?"
"Ei der muß mit."

"Muß mit."
"Tand, Tand
Ist das Gebilde von Menschenhand!"
....

Theodor Fontane, 1880

Das Befahren einer hohen Brücke und das Reisen mit dem Flugzeug haben viele Gemeinsamkeiten, die Gefühle schwanken zwischen Faszination und Unwohlsein. Katastrophenberichte von Brückenein- und Flugzeugabstürzen sind dabei nicht ganz unbeteiligt. Während Theodor Fontane die Herausforderung der Natur durch die Technik in den Mittelpunkt stellt (Ursache des Einsturzes der Brücke am Tay, bei der 200 Reisende starben, war allerdings der Riß eines Rohrflansches, hervorgerufen durch mangelhafte Konstruktion, der Verwendung billigsten Eisens sowie fehlerhafter Gießverfahren, vgl. [2]), so interessiert den Mathematiker bzw. den Mathematiklehrer mehr die Geometrie der Brükken, und zwar insbesondere der Bogenbrücken. Die Bögen haben nämlich vorwiegend die Form von Halbkreisen oder von Parabeln.

Auch in Schulbüchern finden sich Aufgaben zu Brücken, so dient bei Reidt/Wolff/Kerst, Geometrie I, 1927 [11] ein Viadukt als Einstiegsbeispiel für Kreise, im Band Algebra I wird die Parabel einer großen Gitterbrücke untersucht (vgl. [8]), in einem modernen Buch findet sich **Abb. 1** (GAMMA 9, Gymnasium, 1981, S. 51, [12]). In der Regel treten zwei Formen von Aufgaben auf: Entweder ist an gegebenen Maßen zu überprüfen, daß es sich bei dem Bogen um eine Parabel handelt, oder aber es werden Scheitelhöhe und Spannweite gegeben und die Maße der Stützpfeiler sind zu berechnen.

Im folgenden sollen Material bereitgestellt und Anregungen gegeben werden, das Thema Brücken zu einem Unterrichtsprojekt auszubauen, bei dem Parabeln in einer Umweltsituation untersucht werden. Dabei können die Schüler auch z. B. sich selbst die Maße einer Brücke beschaffen, sei es aus vorgegebenen Plänen oder durch eigene Messungen, ferner allgemeingeographische oder technische Erkenntnisse über Brücken gewinnen. Eine Zusammenarbeit insbesondere mit dem Fach Erdkunde wird hierbei sicher günstig sein.

Geschichtlicher Rückblick und Brückenformen

Bis vor 200 Jahren waren Stein und Holz die wichtigsten Materialien zum Brückenbau. Noch heute findet man zahlreiche Natursteinbrücken aus der Römerzeit. Diese bestehen in der Regel aus halbkreisförmigen Gewölben in Verbindung mit Pfeilern und Mauern. Durch den halbkreisförmigen Bogen ist zugleich mit der Spannweite d des Bogens die Brückenhöhe mindestens 1/2 d, was bei Flußbrücken häufig zu "Buckeln" führte. Im 16. Jh. kam man auf die Idee, auch elliptische Bogenbrücken zu bauen, um geringere Fahrbahnhöhen zu erhalten. So weist die Arnobrücke Sta. Trinità in Florenz elliptische Bögen auf, ebenso die im 18. Jh. erbaute Pont de Neuilly in Paris. Höhepunkt im Steinbrückenbau bildeten die Eisenbahnviadukte zu Beginn des 20. Jh., wie z. B. das Langwasserviadukt der Rhätischen Bahn (**Bild 1**).

Bild 1

41.1

Hat die Brückenöffnung (Fig. 41.1) die Form einer Parabel? Denke dir ein geeignetes Achsenkreuz eingezeichnet. Gib die Gleichung der Kurve an.

Abb. 1

Mit der Verwendung von zugfestem Schmiedeeisen im Brückenbau begann Anfang des 19. Jh. das Zeitalter der Hängebrücken und der Fachwerkbrükken. Neben Brücken mit rechteckigen bzw. trapezförmigen Fachwerken entstanden auch solche in Form von Parabelsegmenten, eine besondere Form bildeten die "Fischbauchträger", die von zwei Parabeln begrenzt wurden (**Abb. 2**). Auch Bogenbrücken wurden schließlich aus Eisen bzw. Stahl gebaut, wobei der Bogen Parabelform erhielt. Einen Höhepunkt stellte in Deutschland der Bau der Müngstener Brücke dar (**Abb. 1**), in Frankreich das von G. Eiffel errichtete Viaduc de Garabit (**Bild 2**). Das 20. Jh. ist geprägt von Stahlbeton- und Spannbetonbrücken, wobei vorwiegend Rahmenbrücken, aber gelegentlich auch Bogenbrücken gebaut werden. Eine Kombination beider Bauformen stellt z. B. die Wälsebach-Talbrücke der Bundesbahn-Neubaustrecke Würzburg – Hannover bei Kirchheim dar; der mittlere Brückenteil besteht aus vier Bögen mit maximal 127,5 m Spannweite.

Für weitere Einzelheiten sei insbesondere auf Fuchtmann [2] und Pottgießer [7], verwiesen, eine Übersicht der Brückenformen gibt **Abb. 3** (aus [9]).

Zum mathematisch-technischen Hintergrund

Die Kreislinie hat die besondere Eigenschaft der konstanten Krümmung. Wirken auf ein Gewölbe radial gesehen gleiche Kräfte (**Abb. 4a**), so ist die Kreisform statisch am günstigsten, denn es treten keine Querkräfte auf. Unter Druck stehende Röhren haben daher in der Regel Kreisform, auch haben Bälle mit Innendruck kreisförmige Querschnitte. Sind dagegen die Vertikalkräfte größer als die Horizontalkräfte (**Abb. 4b**), so ist eine elliptische Form zu wählen. So haben Dammdurchlässe häufig elliptische Querschnitte, Eisenbahntunnel sind z. T. elliptisch, häufig allerdings hufeisenförmig, d. h. eine Kombination aus Kreisbogengewölbe und schrägen Wänden. Je stärker die vertikalen Kräfte gegenüber den horizontalen Kräften werden, um so "länger" müßte die Ellipse werden, so daß man im Grenzfall verschwindender Horizontalkräfte zur Parabel gelangt (**Abb. 4c**). Parabolische Gewölbe haben in der Tat die Eigenschaft, daß bei gleichen lotrechten Kräften keine Querkräfte im Tragwerk entstehen, d. h. die Kräfte werden längs des Parabelbogens auf die Brückenfundamente übertragen.

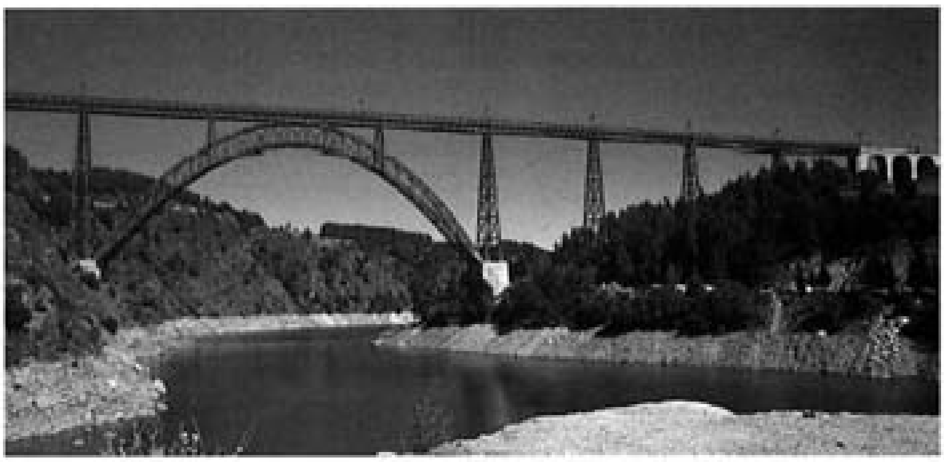


Bild 2

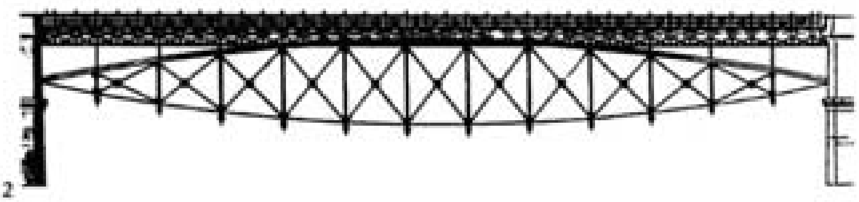


Abb. 2

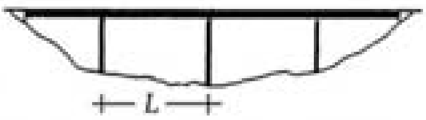
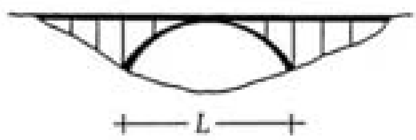
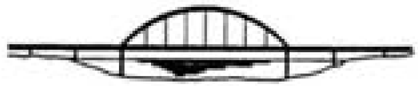
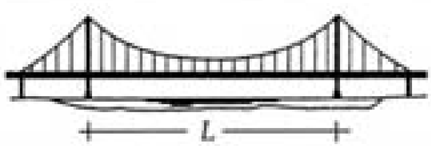
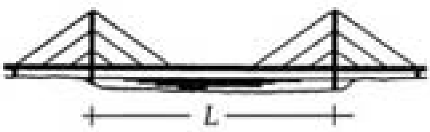
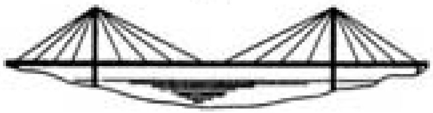
Konstuktion	Skizze	max. Stützweite L (m) Beton	Stahl
Balkenbrücke Talbrücke		120	250
Flußbrücke		250	300
Bogenbrücke Talbrücke		300	500
Flußbrücke			
Hängebrücke		–	1500
Schrägseilbrücke	 	400 (Leichtbeton)	2000

Abb. 3 *(Mit freundlicher Genehmigung des Werner-Verlages Düsseldorf)*

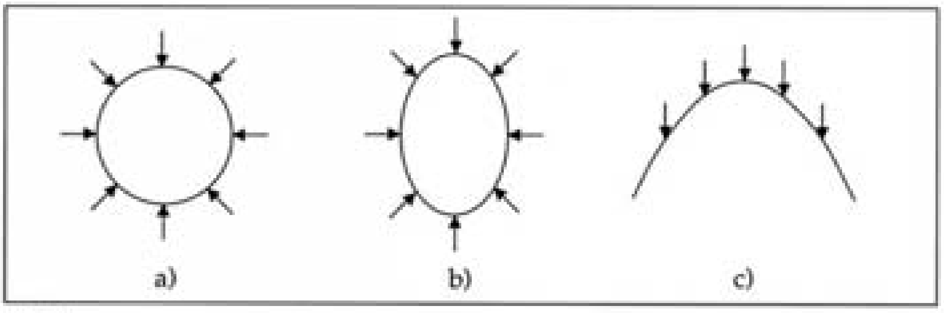


Abb. 4

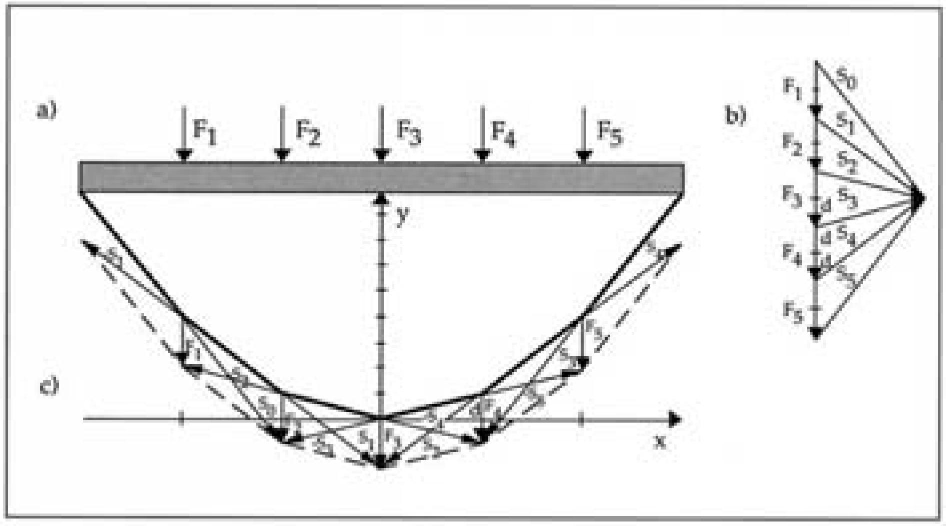


Abb. 5

Zur mathematischen Begründung betrachtet man erst einmal einen waagerechten Balken, auf den in gleichen Abständen gleiche lotrechte Kräfte wirken. Mit Hilfe des "Seileckverfahrens", das hier nur kurz angedeutet werden soll, kann man die Lage eines Seiles finden, das die gleichen Kräfte aufnimmt und ebenso wie der Balken die Kräfte an die Auflagepunkte abgibt (vgl. z. B. [6], S. 65 oder [3], S. 19):

Angenommen, es wirken n = 5 Kräfte F_1 bis F_5 auf den Balken (**Abb. 5a**), dann zerlegt man sie gemäß dem Kräfteplan in **Abb. 5b** in

$F_1 = S_0 + (-S_1)$;
$F_2 = S_1 + (-S_2)$;
.....
$F_5 = S_4 + (-S_5)$; woraus
$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = S_0 + (-S_5)$ folgt.

Geometrisch ergibt sich das "Seileck" von **Abb. 5c**. Die Endpunkte liegen dabei auf einer Parabel. Bezeichnet man nämlich den y-Wert bei F_4 mit d, so sind nach **Abb. 5b** die nächsten y-Werte d + 3 d = 4 d und d + 3 d + 5 d = 9 d. Verallgemeinert man auf 2 k + 1 Kräfte, so erhält man jeweils als y-Wert d, 4 d, 9 d, ... k^2d; das Polygon liegt also auf einer Parabel mit $y = d\,x^2$.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß bei gleichen vertikalen Kräften ein Seil die Form eines Polygons annimmt, dessen Ecken auf einer Parabel liegen. Ein Brückenträger ohne Querkräfte muß also Parabelform haben. Überträgt man diese Überlegung auf bogenförmige Träger, so treten im Fall der Parabel ebenso keine Querkräfte (und übrigens auch keine Drehmomente) auf; durch Übertragung der Druckkräfte "stützen" sich diese Bogenelemente einander ohne Biegung (vgl. z.B. [3], S. 91). Aus diesem Grunde haben die bogenförmigen Fachwerkträger Parabelform, ebenso die meisten Bogenbrücken der letzten 100 Jahre.

Die Müngstener Brücke als "Paradebeispiel" einer parabolischen Bogenbrücke

Die Planung und der Bau der Müngstener Brücke wurde von Dietz 1904 [1] ausführlich dokumentiert, eine detaillierte Beschreibung bietet die preiswerte Schrift von Werner [10], **Bild 3** zeigt ein Foto aus den fünfziger Jahren.

Vor hundert Jahren betrug die Länge der Bahnverbindung zwischen den Industriestädten Solingen und Remscheid 44 km, obwohl beide Städte nur 8 km entfernt liegen. Schienentransporte mußten über Elberfeld und Barmen geführt werden. Dem Bau einer direkten Bahnverbindung stand die topographische Schwierigkeit der Überwindung des tiefen Taleinschnittes der Wupper entgegen. Im Vergleich zu Solingen liegt Remscheid 100 m höher, die Wupper 100 m tiefer als Solingen. Im Jahre 1890 bewilligte der preußische Landtag 5 Mio. Mark für den Bau einer direkten Bahnverbindung. Man entschied sich für eine große Talbrükke bei Müngsten mit einer Höhe von 100 m und einer Länge von 465 – 495 m. Im Rahmen eines Wettbewerbes wurden nach einer Vorlage der kgl. Eisenbahndirektion in Essen (**Abb. 6**) Bauentwürfe für eine Bogenbrücke, eine Gerüstbrücke mit neun Pfeilern und einer Auslegerbrücke ähnlich der Niagara-Brücke der Michigan-Central erstellt. Während die Eisenbahndirektion die Auslegerbrücke favorisierte, das Ministerium aufgrund guter Erfahrungen in Sachsen für eine Gerüstbrücke eintrat, gewann jedoch die Firma Maschinenbau AG Nürnberg (später MAN)

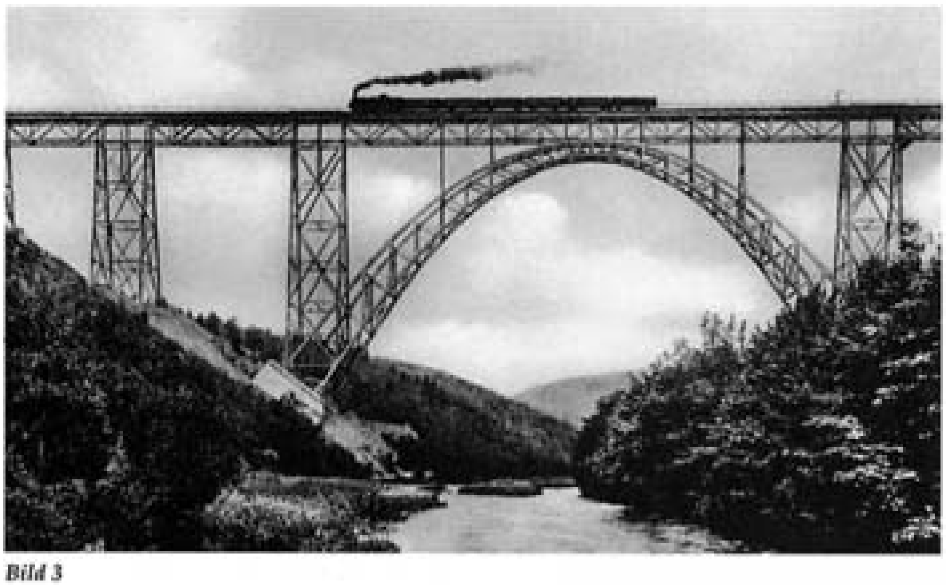


Bild 3

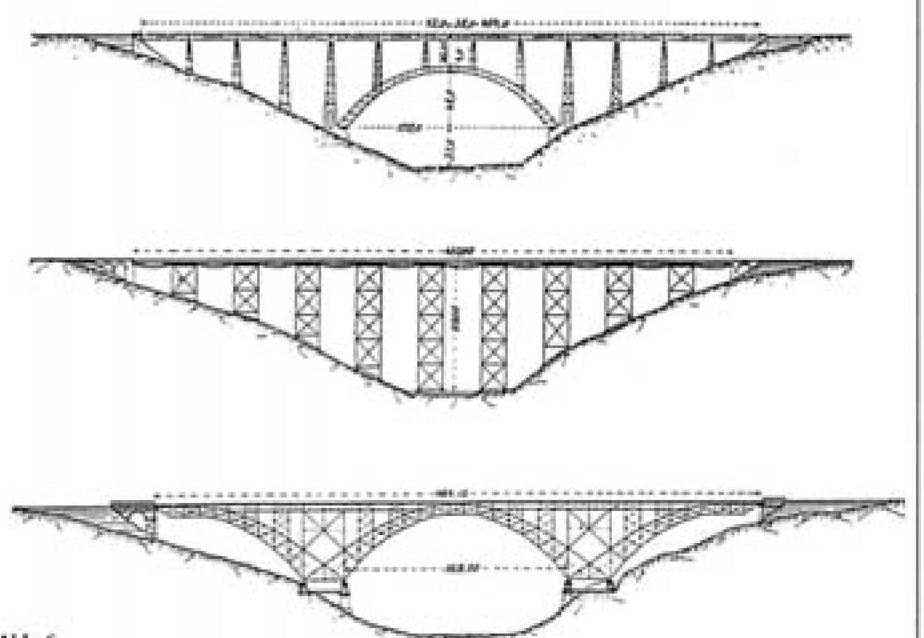


Abb. 6

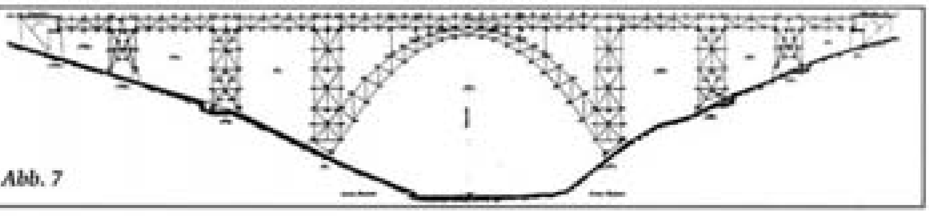


Abb. 7

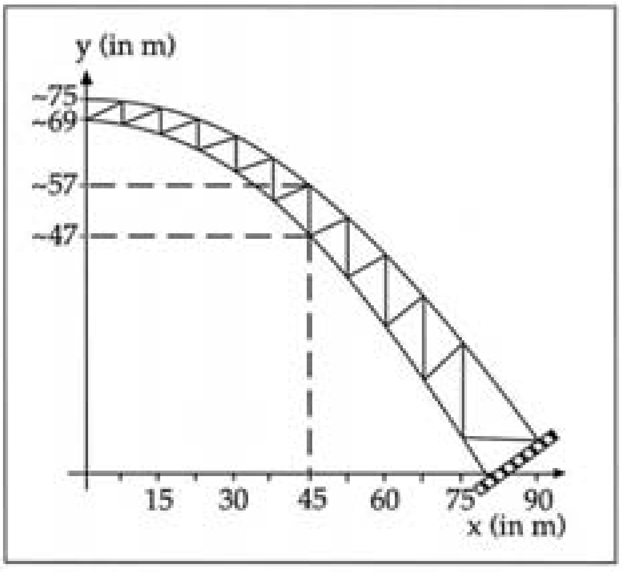


Abb. 8

den Wettbewerb mit einer Bogenbrücke (**Abb. 7**), die dann auch 1894 bis 1897 für 2,6 Mio. Mark gebaut wurde.

Die Müngstener Brücke ist eine Brücke der Superlative. Der Fachwerkbogen spannt 170 m, die anschließenden Gitterbrücken haben lichte Weiten von 30 m und 45 m, die Brücke ist insgesamt 465 m lang, der Bogen 69 m hoch, im Scheitel aber nur 4 m stark. Die Gesamthöhe über der Wupper beträgt 107 m, die Brücke ist damit die höchste in Deutschland.

Der Fachwerkbogen setzt sich (von der Seite her gesehen) aus Untergurtstäben, Obergurtstäben, Vertikalstäben und Diagonalstäben zusammen. Die Knotenpunkte liegen auf Parabeln $y = -a\,x^2 + b$ mit

$$a = \frac{1}{90};\ b = 69{,}3 \text{ bzw. } a = \frac{1}{120};\ b = 73{,}3$$

Die genauen Koordinaten und Stabmaße in Metern gibt die Tabelle zu **Abb. 8** an (nach [1]). Dazu eine Anmerkung: Während die unteren Knotenpunkte genau auf der angegebenen Parabel liegen, weichen die oberen bis zu 0,8 m von den rechnerischen Werten ab. Ferner liegen die beiden letzten Gurtstäbe tangential zur Parabel.

Bogenbrücken als Unterrichtsprojekt

Mehrere Gesichtspunkte sprechen für eine Betrachtung parabolischer Bogenbrücken im Rahmen eines Unterrichtsprojekts:
– Die Schüler lernen eine (technische) Umweltsituation kennen, bei der Parabeln auftreten.
– Eine Reihe mathematischer Fragen und Probleme sind zu beantworten. Z. B.: Wodurch ist eine Parabel bestimmt? Wie findet man die Gleichung einer Parabel, wie wendet man sie an?
– Es sind Daten (Maße) zu beschaffen, und zwar aus Bauplänen und zugehörigen Tabellen oder durch eigene Mes-

	x-Wert	0,0	7,5	15,0	22,5	30,0	37,5	45,0	52,5	60,0	67,5	75,0	80,0	90,0
Unt. Knoten	y-Wert	69,3	68,7	66,8	63,6	59,3	53,6	46,8	38,8	29,3	18,8	7,6	0,0	–
Ob. Knoten	y-Wert	73,3	73,0	71,7	69,5	66,4	62,2	57,0	50,7	43,6	35,2	26,0	–	7,1
Stablängen (von oben nach unten)														
Untergurtstäbe		7,5	7,7	8,2	8,6	9,4	10,2	10,9	12,1	12,9	13,5	9,1		
Obergurtstäbe		7,6	7,6	7,8	8,1	8,6	9,2	9,8	10,3	11,3	11,9	24,2		
Vertikalstäbe		4,0	4,3	4,9	5,9	7,1	8,6	10,2	11,9	14,3	16,4	18,4		
Diagonalstäbe		8,4	8,1	8,0	8,0	8,0	8,2	8,5	8,9	9,5	10,4	15,0		

Tabelle zu Abb. 8

Bild 4

sungen.
– In Verbindung mit eigenem Modellbau könnten statische Fragen experimentell untersucht werden.
– Zahlreiche fächerübergreifende Fragen können diskutiert werden.

Der letzte Aspekt wird am Beispiel der Müngstener Brücke besonders deutlich: Das Höhenprofil zwischen Solingen und Remscheid kann untersucht werden, die Länge der Bahnverbindung zwischen beiden Orten bei fehlender Müngstener Brücke kann am Kursbuch bestimmt werden (es sind heute sogar 49 km), die heutige Verkehrsbedeutung der Strecke Solingen – Remscheid kann untersucht werden (sie ist noch nicht einmal elektrifiziert!); geschichtlich interessant sind auch Einzelheiten wie der Richtspruch beim Einschlagen der letzten Niete und der frühere Name Kaiser-Wilhelm-Brücke; technisch interessant sind Einzelheiten vom Bau der Brücke. Als Quellentext kann hierzu die Schrift von Werner [10] genutzt werden.

Mathematisch interessiert am meisten, ob der Brückenbogen wirklich eine Parabel darstellt. Um dies zu prüfen, gibt es drei Möglichkeiten. Am naheliegendsten, wenn auch nicht am einfachsten, ist es, die Gleichung der Parabel aufzustellen, und dann die übrigen Maße durch Einsetzen zu prüfen. Dies setzt weitere Überlegungen voraus. Wie bestimmt man die Gleichung der Parabel, wie legt man dazu das Koordinatensystem am günstigsten? Als Ursprung des Koordinatensystems wird man den Scheitel der Parabel oder die Mitte der Grundlinie des Bogens wählen, die Lage des Scheitels gibt den ersten Bestimmungspunkt der Parabel. Der Faktor vor x^2 wird in der Regel durch Einsetzen der halben Spannweite und der Bogenhöhe berechnet (erstaunlich ist dabei, daß der Faktor deutlich kleiner als 1 ist, im Gegensatz zu den sonst im Unterricht auftretenden Parabeln).

Eine andere Kennzeichnung der Parabel erhält man durch die Eigenschaft: Liegt (x_0, y_0) auf der Parabel, so auch (rx_0, r^2y_0). In Worten: Multipliziert man die x-Koordinate mit r, so muß sich die zugehörige y-Koordinate um den Faktor r^2 vergrößern.

Hierzu als Beispiel die Eisenbahnbrücke über die Fulda bei Guntershausen (südlich von Kassel). Sie war ursprünglich ein Kreisbogenviadukt. 1949 – 1950 wurde der zerstörte Mittelteil durch eine Stahlbeton-Bogenbrücke ersetzt (**Bild 4**). Die Maße können dem Längsschnitt in **Abb. 9** entnommen werden (nach [5]). Wählt man den Scheitel als Ursprung, so sind im Vergleich zur ersten, 2,33 m langen Stütze die folgenden 1,5mal, 2mal und 2,5mal soweit vom Ursprung entfernt. Sie müßten im Fall einer Parabel also 2,25mal, 4mal bzw. 6,25mal so lang wie die erste Stütze sein (jeweils gemessen bis zur Bogenmitte).

Eine dritte, mehr geometrische Kennzeichnung gibt **Abb. 10**: Die Endtangenten eines Parabelbogens schneiden sich in einem Punkt, der ebensoweit vom Scheitel entfernt ist wie die Bogensehne. Im Fall der Müngstener Brücke liegen die letzten Gurtstäbe auf diesen Tangenten.

Der Vollständigkeit wegen sei angemerkt, daß alle drei Kennzeichnungen eigentlich für alle Punkte des Bogens geprüft werden müßten, was an der unterrichtlichen Praxis natürlich vorbeigehen würde.

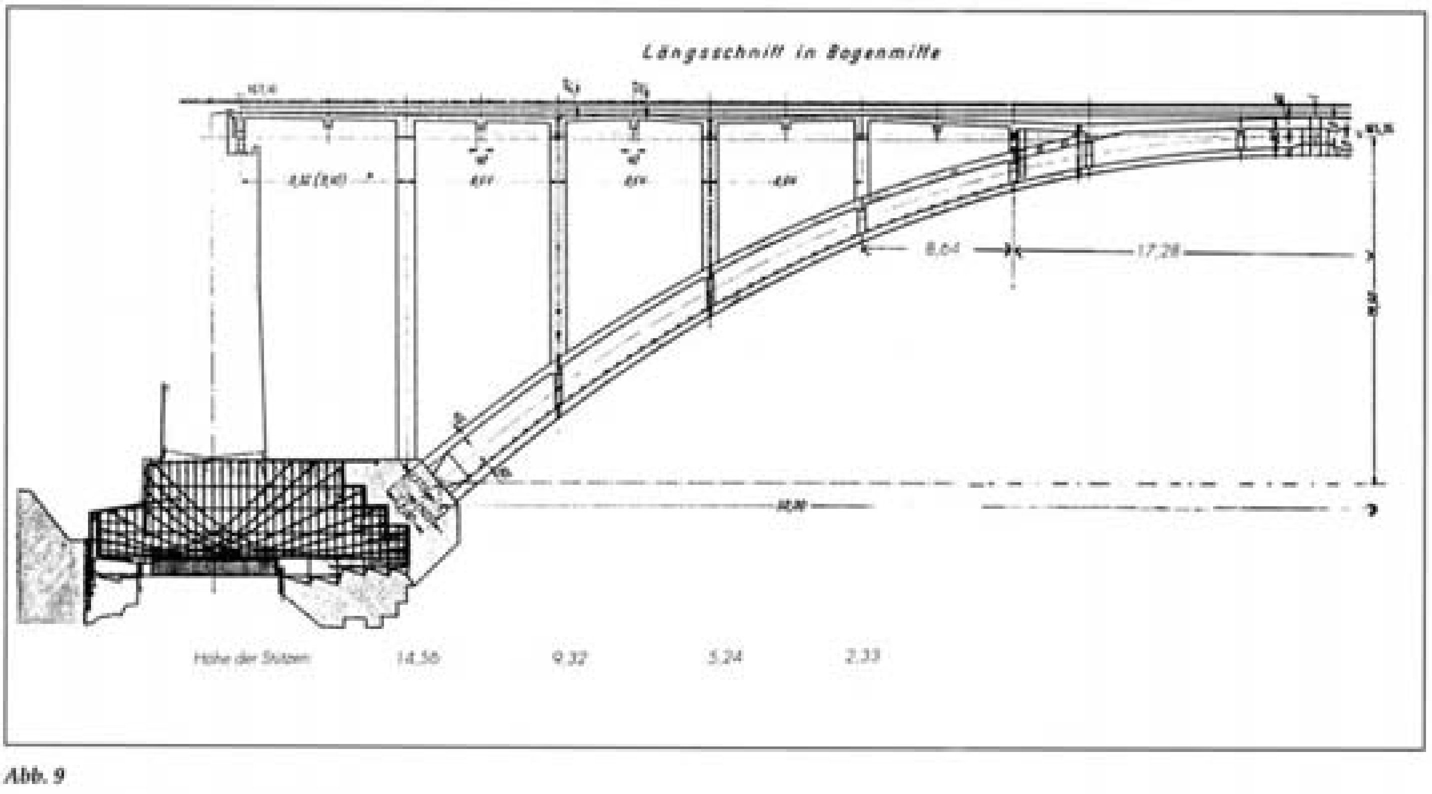


Abb. 9

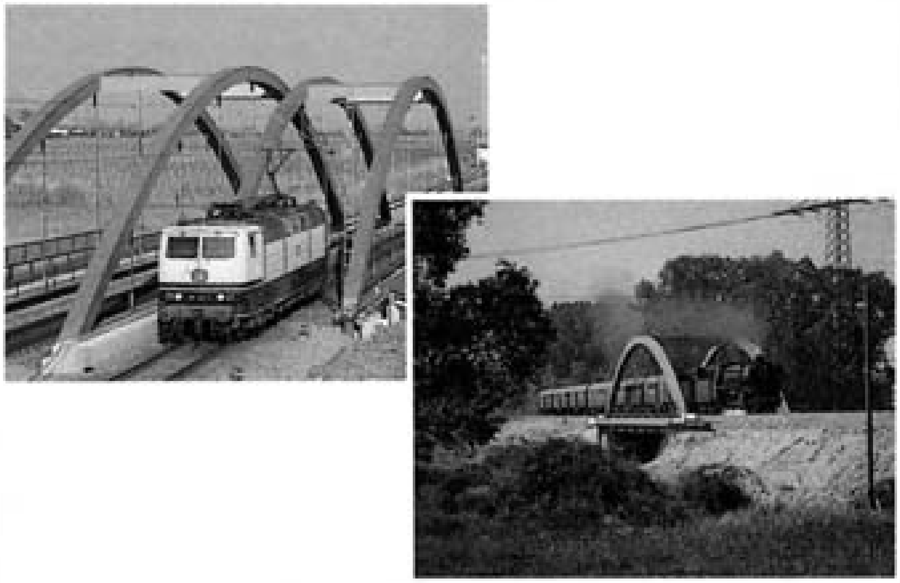


Bild 5

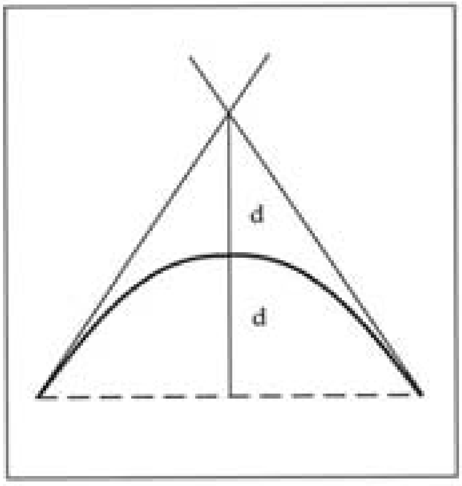


Abb. 10

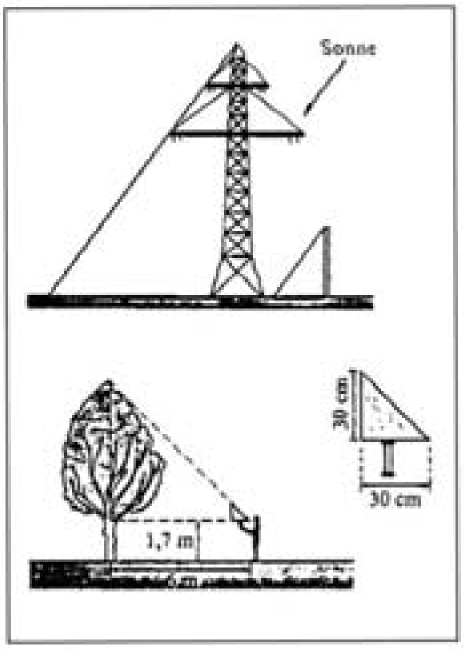


Abb. 11

Neben der Prüfung der Parabeleigenschaft können natürlich noch weitere Maße berechnet werden, wie z. B. die Stablängen bei der Müngstener Brücke, vgl. die **Tabelle** zu **Abb. 8**. Generell gilt für alle diese Rechnungen, daß stets sachgerechtes Runden notwendig ist. Die Problematik kann hier praxisnah diskutiert werden.

Die Frage der Datenbeschaffung hängt natürlich wesentlich von der speziellen Brücke ab, die näher untersucht werden soll. Dieser Beitrag gibt die Maße zu zwei Brücken an, weitere Brücken mit Maßangaben finden sich z. B. auch in der Schrift von Werner. Für Schüler meist interessanter und für ein Unterrichtsprojekt ergiebiger ist es jedoch, selbst eine Brücke in der Nachbarschaft auszumessen. Hierbei sind Bögen mit aufgehängter Fahrbahn wie in **Bild 5** besonders günstig. Ist die Brücke begehbar, so kann ihre Länge direkt gemessen werden. Die Höhenmessung der einzelnen Abspannungen erfolgt am besten aus der Schattenlänge durch Vergleich mit der Schattenlänge eines lotrechten "Eichstabes". Als Alternative ist auch das Försterdreieck einsetzbar, mit dem bei günstiger Lage der Brücke auch deren Länge gemessen werden kann. **Abb. 11** zeigt beide Meßverfahren, wie sie z. B. in GAMMA 9 Gesamtschule [12] dargestellt werden.

Eine andere Methode der Brückenmessung besteht darin, die Brücke genau von der Seite zu fotografieren und dann das Bild auszumessen. Aus einer bekannten Länge können dann die übrigen Maße berechnet werden. Dieses Verfahren ist jedoch nur dann korrekt, wenn bei der Aufnahme Bild- und Filmebene zueinander parallel liegen. Andernfalls kommt es zu "stürzenden Linien" und damit zu Verzerrungen. In diesem Sinne ist z. B. **Bild 3** nicht zum Ausmessen geeignet.

Abschließend ein paar Bemerkungen zu den statischen Fragen. Die oben dargestellten Überlegungen setzen Kenntnisse über Vektoren bzw. über Kräftedarstellungen in der Physik voraus. Trotzdem läßt sich z. B. im 9. Schuljahr zumindest experimentell das Ergebnis überprüfen. Dazu baut man aus Märklin metall oder Fischertechnik das Seileck von **Abb. 5** nach und prüft mit eingehängten Gewichten gleicher Masse, ob Querkräfte auftreten. Zuvor müssen natürlich die Längen der benötigten Stäbe berechnet werden.

In einem nächsten Schritt kann man in Zusammenarbeit mit dem Werkunterricht ein Modell einer Bogenbrücke bauen lassen, wobei als Fahrbahn z. B. ein sehr dünnes Sperrholzbrett genommen werden sollte. Anschließende Belastungsversuche des Brückenmodells und dazu im Vergleich des Fahrbahnbretts allein lassen die Stabilität von Bogenbrücken deutlich werden.

Literatur

[1] Dietz, W.: Die Kaiser-Wilhelm-Brücke über die Wupper bei Müngsten, 2 Bände, Berlin 1904.
[2] Fuchtmann, E.: Stahlbrückenbau, München 1983
[3] Marguerre, K.: Technische Mechanik, Teil I, Berlin u. a. 2. Auflage 1973
[4] Menn, Ch.: Stahlbrückenbau, Wien – New York, 1986
[5] Mörsch, E.: Brücken aus Stahlbeton und Spannbeton, Stuttgart 1958
[6] Pestel, E.: Technische Mechanik, Teil I, Mannheim – Zürich 1969
[7] Pottgießer, H.: Eisenbahnbrücken, Basel u. a. 1985
[8] Schlette, A.: Die Eisenbahn im Schulbuch – Beispiele aus 100 Jahren, In: ml, Heft 30 (1988), S. 12 – 15
[9] Weidemann, H.: Brückenbau, Düsseldorf 1982
[10] Werner, E.: Die Eisenbahnbrücke über die Wupper bei Müngsten (1893 – 1897). Heft 5 der Reihe "Dokumentation technischer Denkmäler", Köln 1975

Zitierte Schulbücher:

[11] Reidt/Wolff/Kerst; Algebra I und Geometrie I, Berlin 1927
[12] Hagen/Vollroth/Weidig;
GAMMA 9 Gymnasium, Stuttgart 1981 und Gesamtschule G-Kurs, Stuttgart 1987

Fotos: I. Weidig