

# mathematiklehren

Die Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen

Mit Mathe-Welt

SCHÜLER-ARBEITSHEFT

# 138

Oktober 2006

Pädagogische Zeitschriften  
bei Friedrich in Velber  
in Zusammenarbeit mit Klett



## Daten und Zufall



Herausgeber des  
Thementeils  
*Andreas Büchter*

Liebe Kolleginnen und Kollegen, wie wird eigentlich eine Wahlumfrage erstellt, wie kommen Warentester zum Urteil „befriedigend“ für eine Zahnpasta und was bedeutet eine Regenwahrscheinlichkeit von 70% für das nächste Wochenende?

Mit Daten umgehen, den Zufall erfassen – dahinter steckt Mathematik, die auf eine ganz eigene Art faszinieren und motivieren kann. Schülerinnen und Schüler können ihre eigenen Erfahrungen einbringen, passende Fragestellungen formulieren, mit einfachen mathematischen Mitteln Antworten finden und dabei stochastische Begriffe und Konzepte selbst entwickeln. Im Vordergrund stehen hierbei keine komplexen Rechenverfahren, sondern die Interpretation der Ergebnisse – ein neuer Einstieg für manch „Mathe-müden“ und Gelegenheit zum Argumentieren und Diskutieren für alle.

Das Thema „Daten und Zufall“ bietet aber auch viele Vernetzungen und Zugänge zu anderen mathematischen Bereichen, wie „Funktionaler Zusammenhang“ oder „Geometrie“ – und kann so zu einem vertieften Verständnis und zu nachhaltigem Lernen beitragen.

Neue Erkenntnisse werden in vielen Wissenschaften aufgrund von Daten gewonnen oder zumindest „empirisch abgesichert“. Neue Wege im Unterricht werden durch Ideen angebahnt, beim Ausprobieren weiterentwickelt und im kollegialen Austausch weitergetragen. Einige erprobte Unterrichtseinheiten und -projekte, die den Umgang mit Daten und Zufall in verschiedenen Kontexten zeigen, finden Sie in diesem Heft.

Viel Erfolg bei der Umsetzung in Ihrem Unterricht wünscht Ihnen

*Andreas Büchter*

# Daten und Zufall

## Basisartikel

ANDREAS BÜCHTER

### Daten und Zufall entdecken

4

Aspekte eines zeitgemäßen Stochastikunterrichts

## Unterrichtspraxis

ANDREAS BÜCHTER/JAN HENDRIK MÜLLER

3.–13. Schuljahr

### Wer gewinnt beim Murmelspiel?

12

Lage-Kennwerte (als normative Modelle) entwickeln

ULRICH BRAUNER

8.–10. Schuljahr

### Jede Stimme zählt?

18

Zufallseffekte bei Wahlprognosen untersuchen

JAN HENDRIK MÜLLER

7.–10. Schuljahr

### Reis im Kreis

23

Experimentelle Zugänge zum Kreisflächeninhalt

TIMO LEUDERS

9.–10. Schuljahr

### Radioaktive Heftzwecken

44

Exponentiellen Zerfall aktiv erleben und reflektieren

GUIDO PINKERNELL

9.–13. Schuljahr

### Test positiv – Diagnose negativ

50

Medizinische Testergebnisse richtig interpretieren

HENRIK KRATZ

11.–13. Schuljahr

### Aktiegewinne ohne Risiko?

56

Werbeversprechen mit Kennwerten und Zufallsversuchen kritisch hinterfragen

## Magazin

MICHAEL KATZENBACH

### Die Aufgaben-Drehscheibe

63

Ein Werkzeug, um den Öffnungsgrad von Aufgaben einzuschätzen

Autoren/Vorschau/Impressum

65

Die etwas andere Aufgabe

66

Ideenkiste

68

NEU

Kurzfassungen

unter [www.mathematik-lehren.de](http://www.mathematik-lehren.de)

## Mathe-Welt

SCHÜLER-ARBEITSHEFT

ab 7. Schuljahr

### Mathe-Welt

#### „Dem Zufall auf der Spur“

27

Mit Experimenten, Daten und einer Tabellenkalkulation

- Den Zufall beim Würfeln untersuchen
- Experimente durchführen und auswerten
- Den Zufall mit dem Computer simulieren



Bestell-Nr. 92907 Preis: 2€ (bei Einzelbestellung 2,50€)



# Daten und Zufall entdecken

## Aspekte eines zeitgemäßen Stochastikunterrichts

Daten und Zufall begegnen uns an jeder Ecke – mal ganz offen und mal versteckt. Dies lässt sich nutzen: für sinnstiftende Zugänge zur Stochastik in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht.

**ANDREAS BÜCHTER** Sind Ihnen heute beim morgendlichen Blick in die Zeitung der aktuelle Geschäftsklima-Index, die Regenwahrscheinlichkeiten für die nächsten Tage, die Kriminalitätsrate mehrerer Großstädte im Vergleich ... oder auch die Einschätzung eines Fußballspielers zur Chance auf den Einzug seiner Mannschaft in die nächste Runde des DFB-Pokals aufgefallen? Wie ging Ihr Tag weiter? Vielleicht haben Sie

- in der Schule bei der Auswertung der letzten Arbeit den Klassendurchschnitt berechnet, während die Referendarin sich intensiv mit den aktuellen Daten zum Lehrereinstellungsverfahren

<b>Bildungsstandards für den Primarbereich</b>	<b>Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss</b>
<p><b>Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit</b></p> <p>Daten erfassen und darstellen</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– In Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen,</li> <li>– aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen.</li> </ul> <p>Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich),</li> <li>– Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen.</li> </ul>	<p><b>Leitidee Daten und Zufall</b></p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– werten graphische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,</li> <li>– planen statistische Erhebungen,</li> <li>– sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie graphisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software),</li> <li>– interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen,</li> <li>– reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren,</li> <li>– beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,</li> <li>– bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.</li> </ul>

Tab. 1: Erwartungen an die Lernenden im Bereich Daten und Zufall (vgl. [www.kmk.org](http://www.kmk.org))

und ihren persönlichen Chancen auseinander setze;

- in der Lehrerkonferenz einer Kollegin gelauscht, die über die Evaluation des neuen Streitschlichterprogramms berichtete und ihm mit einer Vielzahl von Zahlen, Grafiken und derart gestützten Bewertungen einen deutlichen Erfolg bescheinigte;
- und sich bei der Heimfahrt ein wenig geärgert, weil wieder einmal fünf von sechs Ampeln rot waren. Spielt Ihnen das Schicksal übel mit, oder ist es nur Zufall? Wie wahrscheinlich ist es wohl, dass fünf von sechs Ampeln rot sind? Wie lässt sich so etwas überhaupt bestimmen?

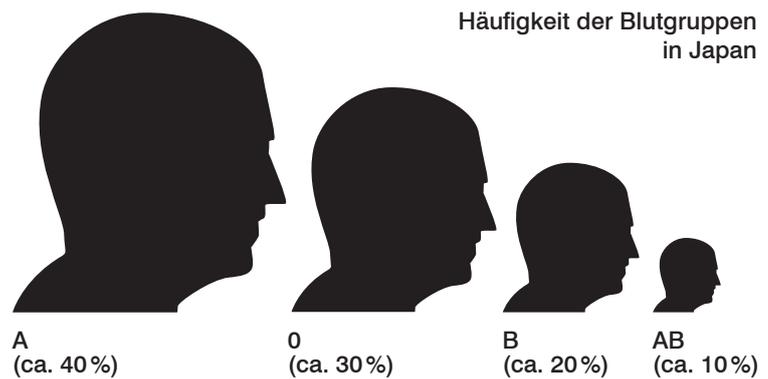
Daten und Zufall, Chancen und Risiken spielen – mal offensichtlich, mal etwas versteckt – immer wieder eine wesentliche Rolle in unserem Leben. Auch der Alltag Ihrer Schülerinnen und Schüler ist mit solchen Phänomenen gespickt, die sich gut zum Ausgangspunkt für einen sinnstiftenden und interessanten Stochastikunterricht machen lassen.

### Daten und Zufall – allgemeinbildend

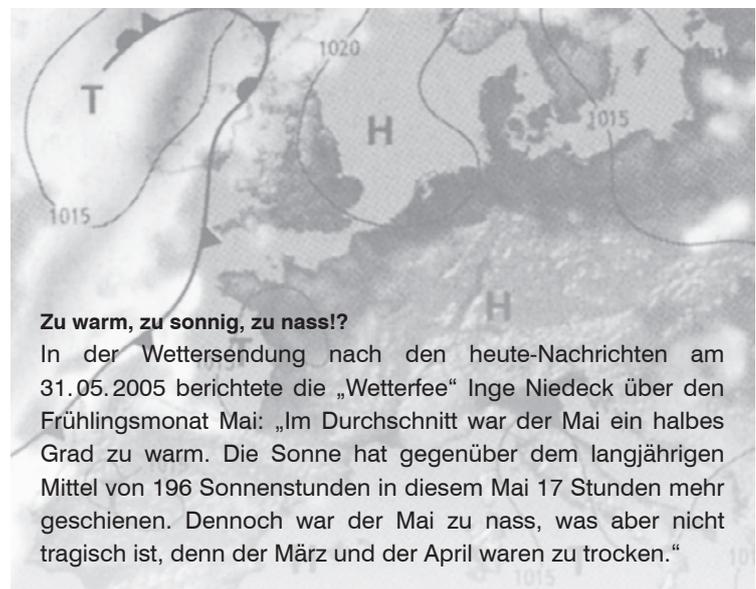
Keine Frage, das Thema „Daten und Zufall“ (kurz und klassisch: *Stochastik*) gehört in den Mathematikunterricht und ist neben „Zahl“, „Messen“, „Raum und Form“ und „Funktionaler Zusammenhang“ eine der fünf Leitideen in den KMK-Bildungsstandards für die Sekundarstufe I. Sie trägt direkt erkennbar zu einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht bei (vgl. Bender, 1997; Schupp, 2004).

Phänomene unserer Umwelt werden mit Hilfe von Daten beschrieben, erklärt, verstanden und auch verändert. Häufig werden Daten unangemessen dargestellt (vgl. **Abb. 1**). Nicht immer ist dabei eine böse Absicht im Spiel. Aber wer das Einmaleins der Wahrnehmung gut gelernt hat, weiß, wie man mit grafischen Darstellungen manipulieren kann – wenn man möchte. Auch die verbale Präsentation statistischer Daten ist nicht ohne Tücke. Können Ihre Schülerinnen und Schüler statistische Aussagen wie die einer Wettermeldung (**Abb. 2**) kritisch hinterfragen und ihre Bedeutung erfassen? Noch schwieriger ist der Umgang mit Wahrscheinlichkeiten: Bei der Interpretation der Ergebnisse medizinischer Tests steckt oft der Teufel im Detail. Wie dies mit Schülerinnen und Schülern untersucht werden kann, stellt Guido Pinkernell in seinem Beitrag (ab S. 50) dar.

Immer wieder sollen wir mit datenbasierten Aussagen über Chancen oder Risiken von etwas überzeugt oder abgehalten werden. Wie kann man anhand von Daten Entscheidungen treffen – und nicht einfach „aus dem Bauch heraus“? Dies zu lernen ist ein wesentliches Ziel: *Um unsere Schülerinnen und Schüler zu mündigen Bürgerinnen und Bürgern zu*



**Abb. 1:** Das Auge nimmt die Fläche der Figuren als Repräsentanten für die dargestellten Daten wahr. Stellen die Figuren die Daten angemessen dar?



**Abb. 2:** Wie kommen solche Aussagen zustande? Wann ist ein Monat zu warm, zu sonnig oder zu nass?

*erziehen und zu bilden, müssen wir in der Schule Kompetenzen für den kritischen Umgang mit Daten, Chancen und Risiken fördern.*

Diese Überlegungen sind auch in den Entwurf der Bildungsstandards der KMK eingeflossen. Die **Tabelle 1** führt die Erwartungen an alle Schülerinnen und Schüler am Ende der Klasse 4, sowie an diejenigen, die am Ende der Klasse 10 den mittleren Schulabschluss anstreben, auf. Dabei wird aus gutem Grund von Schülerinnen und Schülern am Ende der Klasse 10 erwartet, dass sie auch eigene Datenerhebungen planen, durchführen und auswerten können: In immer mehr Wissenschaften und auch beim Qualitätsmanagement in Industrie oder bei Non-Profit-Organisationen werden Erkenntnisse aufgrund von Daten gewonnen oder zumindest „empirisch abgesichert“. Timo Leuders und Jan Müller stellen in ihren Beiträgen in diesem Heft zwei Unterrichtprojekte vor, bei denen in naturwissenschaft-

### Arbeitslosigkeit macht krank

Die deutschen Ärzte haben vor den gesundheitlichen Folgen von Arbeitslosigkeit und Armut gewarnt. Sie ließen Menschen früher altern und förderten ungesunde Verhaltensweisen. ...

Netzeitung, 4. Mai 2005

### Dick, dumm, krank und traurig

Schulische Folgen des Medienkonsums.  
HAMBURG – Hoher Medienkonsum verschlechtert laut einer Studie die Schulleistungen von Kindern. ...

Ruhr-Nachrichten,  
26. September 2005

**Abb. 3:** Wie kommen solche Aussagen zustande?  
Wie lassen sich Ursachen und Wirkungen untersuchen?

lichen, experimentellen Kontexten die Anwendung statistischer Methoden zum Erkenntnisgewinn beiträgt (S. 23 bzw. S. 28).

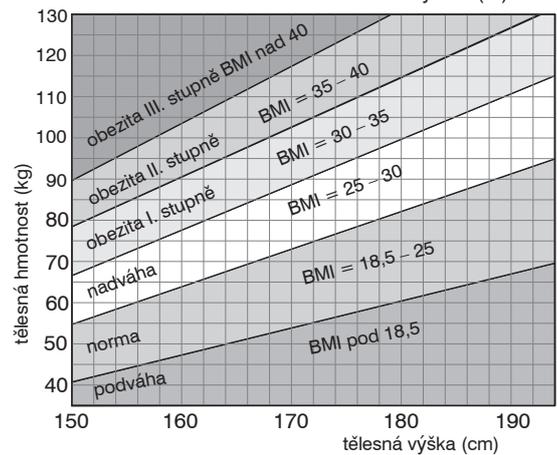
### Daten und Zufall – handlungsorientiert

Ob im Unterricht gerade die Erhebung, Auswertung und Interpretation von Daten im Vordergrund stehen, oder ob es um die Einschätzung von Zufallseffekten geht: In jedem Fall liegt es nahe, die Lernarrangements schüler- und handlungsorientiert zu gestalten. Beim einfachen Umgang mit Daten („Beschreibende Statistik“) können die Schülerinnen und Schüler die in **Kasten 1** vorgestellten Forschungsprojekte durchführen. Dabei lernen sie mit dem *deduktiven* und *induktiven Arbeiten* zwei grundsätzlich verschiedene „Forschungsstrategien“ kennen.

Oder die Schülerinnen und Schüler formulieren selbst Fragen, die sie stärker interessieren, und versuchen, diese datengestützt zu beantworten. Immer geht es dabei zunächst um ein ehrliches, eigenes „Wissen wollen“: Hängen die Noten in bestimmten Fächern mit Art und Umfang der Computernutzung zusammen? Spielt die sportliche Betätigung in der Freizeit eine Rolle? Ein solches Erkenntnisinteresse wirkt sinnstiftend und steuert die gezielte Datensammlung – ganz im Sinne einer wirklichen Handlungsorientierung und eines möglichst authentischen Anwendens von Statistik.

Es können auch zunächst Zeitungsmeldungen, wie die in **Abb. 3**, oder Werbeanzeigen ein guter Ausgangspunkt sein, um Ergebnisse zu hinterfragen und um eigene Fragen zu stellen. Diesen Ansatz wählt Henrik Kratz, der in seinem Beitrag ab S. 56 zeigt,

$$\text{Body Mass Index (BMI)} = \frac{\text{hmotnost (kg)}}{\text{výška}^2 (\text{m})}$$



**Abb. 4:** Auch auf tschechisch verständlich: Eine Darstellung des Body-Mass-Index (BMI), mit dem das „Normalgewicht“ festgelegt wird. Wie kommen solche Modelle zustande?

wie Schülerinnen und Schüler die Werbeversprechen für „Garantiefonds“ kritisch untersuchen.

Stehen Zufallsphänomene und der Umgang mit Wahrscheinlichkeiten im Vordergrund („Wahrscheinlichkeitsrechnung“), bieten sich viele Experimente an. Vertraute Objekte wie Würfel oder Münzen wirken sehr motivierend. Vom frühen Grundschulalter bis in die späte Sekundarstufe lassen sich dabei im Prinzip identische Phänomene untersuchen: Geben Sie Ihren Schülerinnen und Schülern doch einfach einmal für eine Partnerarbeit zwei Würfel und fragen Sie, auf welche Augensumme sie wetten würden. Die Würfel werden schnell fallen ... und eine theoretische Analyse anregen und unterstützen. Dabei treten in fast allen Altersgruppen zunächst ähnliche Vermutungen auf:

- Die Augensummen 2 bis 12 sind gleichwahrscheinlich.
- Die 2, 3, 11 und 12 sind gleichwahrscheinlich, ebenso die 4, 5, 9 und 10, sowie die 6, 7 und 8.
- Die 7 ist am wahrscheinlichsten, danach in absteigender Reihenfolge die Paare 6 und 8, 5 und 9, 4 und 10, 3 und 11 sowie 2 und 12.

Nach einer gemeinsamen Versuchsreihe in der Klasse lässt sich in der Regel bereits gut einschätzen, welche der Vermutungen wohl zutrifft. Dabei stellt sich die Kraft des kooperativen, arbeitsteiligen Vorgehens heraus: 16 Schülerpaare mit je zwei Würfeln sind natürlich bedeutend schneller dabei, 1000 Versuche durchzuführen als jedes Paar für sich. Aber es bleibt nicht beim Experiment. Zunächst waren alle ursprünglichen Vermutungen plausibel; selbst wenn nun die Simulation auf eine richtige hindeutet, bleibt doch die Frage: Warum soll gerade diese tragfähig sein? Warum nicht auch eine der anderen?