

12.1.3 Das Verhältnis einer Teilstrecke \overline{AT} zu der Gesamtstrecke \overline{AB}

Die Schüler erwerben folgende inhaltliche sowie prozessbezogene mathematische Kompetenzen. Sie erkennen:

- Sind die Punkte A , T und B kollineare Punkte, sodass die lineare Abhängigkeit der Vektoren \overline{AT} und \overline{AB} über die Vektorgleichung $\overline{AT} = \frac{t}{t+1} \cdot \overline{AB}$ dokumentiert werden kann, dann verhält sich die Länge der Teilstrecke $|\overline{AT}|$ zur Gesamtstreckenlänge $|\overline{AB}|$ wie t zu $t+1$:

$$\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AB}|} = \frac{t}{t+1}; t \neq -1$$

Dabei ist t das Teilverhältnis, unter dem der Punkt T die Strecke \overline{AB} unterteilt.

Methode

fragend-entwickelnde Methode

Unterrichtsschritte:

Der Lehrer bilanziert und stellt ein weiteres Stundenziel vor:

Bisher haben wir das Verhältnis der Teilstrecken \overline{AT} und \overline{TB} bzw. $|\overline{AT}|$ und $|\overline{TB}|$, in das der Teilungspunkt T eine Strecke \overline{AB} unterteilt, gebildet, um das Teilverhältnis t zu definieren. Um der Zielvorstellung der eingangs erklärten Spielidee gerecht zu werden, gilt es nun eine weitere Vorarbeit zu leisten.

Anmerkung

Im Folgenden sind Strecken als Beträge der zuständigen Vektoren ausgedrückt.

Fortsetzung des Lehrervortrags:

Hierzu definieren wir das Verhältnis der Länge der Teilstrecke $|\overline{AT}|$ und der Gesamtstreckenlänge $|\overline{AB}|$, unter der Maßgabe, dass die Koordinaten der Punkte A , B und T einer Geraden g sowie das Teilverhältnis t , unter dem der Teilungspunkt T die Strecke \overline{AB} unterteilt, gegeben sind.



Tafelanschrift

Das Verhältnis der Länge der Teilstrecke $|\overline{AT}|$ zu der Gesamtstreckenlänge $|\overline{AB}|$

Der Lehrer

erteilt den Schülern den Auftrag, die hier zuständige Verhältnisgleichung aufzustellen. Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt sein:

Das Verhältnis soll unter Einbeziehung des Teilverhältnisses $t = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|}$ und

seiner äquivalenten Form $|\overline{AT}| = t \cdot |\overline{TB}|$, d. h. in Abhängigkeit des Teilverhältnisses t , dargestellt und die Gesamtstrecke $|\overline{AB}|$ über die Summe ihrer beiden Teilstrecken $|\overline{AT}|$ und $|\overline{TB}|$ eliminiert werden.

Methode

eigenverantwortliches, arbeitsgleiches Arbeiten in Gruppen

Präsentation

Ein zufällig bestimmter Schüler einer Gruppe überträgt die Herleitung an die Tafel und erklärt:



Tafelanschrift
Erklärungen in verkürzter Form

Für das Verhältnis der Länge der Teilstrecke $|\overline{AT}|$ zu der Gesamtstreckenlänge $|\overline{AB}|$ gilt: $\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AB}|}$ (1)

Eliminierung von $|\overline{AB}|$: Darstellung dieser Strecke als Summe zweier Teilstrecken: $|\overline{AB}| = |\overline{AT}| + |\overline{TB}|$ (2)

(2) in (1): $\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AT}| + |\overline{TB}|}$ (3)

Eliminierung von $|\overline{AT}|$ über die Definitionsgleichung des Teilverhältnisses

t und seiner äquivalenten Form: $t = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} \Leftrightarrow |\overline{AT}| = t \cdot |\overline{TB}|$ (4)

(4) in (3): $\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} = \frac{t \cdot |\overline{TB}|}{t \cdot |\overline{TB}| + |\overline{TB}|} = \frac{t \cdot |\overline{TB}|}{|\overline{TB}| \cdot (t+1)} = \frac{t}{t+1}; t \neq -1$

kurzer Methodenwechsel

zurück zur fragend-entwickelnden Methode

Denkanstoß des Lehrers

Das Verhältnis $\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|}$ durften wir nur deshalb als Teilverhältnis t definieren,

weil die lineare Abhängigkeit der Vektoren \overline{AT} und \overline{TB} vorausgesetzt war und über die Vektorgleichung $\overline{AT} = t \cdot \overline{TB}$ dokumentiert wurde (vgl. Definition des Teilverhältnisses).

Dann wird auch in Analogie hierzu die lineare Abhängigkeit der Vektoren \overline{AT} und \overline{AB} und eine dieser Abhängigkeit entsprechende Vektorgleichung

vorausgesetzt, um dem Verhältnis $\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AB}|}$ die gerade hergeleitete Verhältniszahl $\frac{t}{t+1}$ zuzuordnen.

Mögliche Schülerreaktion (falls notwendig unter Anleitung sowie der Moderation des Lehrers)

Die Punkte A , T und B sind kollineare Punkte, sodass der Vektor \overline{AT} in linearer Abhängigkeit des Vektors \overline{AB} dargestellt werden kann. Diese