10.1.2 Typische Aufgaben zur gegenseitigen Lage von Ebenen, die in Normalenform gegeben sind, sowie zur gegenseitigen Lage von Ebenen in Normalenform und von Geraden

Stundenbild

1. Aufgabe: Parallelebenen

Bestimmen Sie zuerst eine Normalenform, dann eine Koordinatengleichung einer Ebene E_2, die zu der Ebene $E_1: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ parallel verläuft und durch den Punkt $Q(3|-2|1)$ geht.

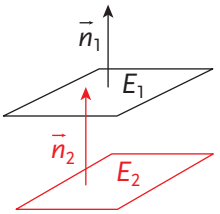

Abb. 10.3

Methode

eigenverantwortliches, arbeitsgleiches Arbeiten in Gruppen

Der Lehrer

erteilt den Schülern die Aufgabe, mit Hilfe der vorgegebenen Schemazeichnung die gestellte Aufgabe zu lösen.

Präsentation

Ein nach dem Zufallsprinzip bestimmter Schüler einer Gruppe überträgt die von der Gruppe durchgeführte Rechnung an die Tafel und erklärt den Weg.

Tafelanschrift
Erklärungen stichwortartig

Aus Abb. 10.3 ist ersichtlich:
Wenn zwei Ebenen zueinander parallel sind, dann verlaufen auch ihre Normalenvektoren zueinander parallel: Ihre Normalenvektoren sind also entweder identisch oder linear abhängig.
Fester Punkt der Ebene E_2 sei der Punkt Q, Normalenvektor sei der Normalenvektor von E_1 (bzw. ein hierzu linear abhängiger Vektor).
Dann gilt gemäß $(\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n} = 0$ für die Normalenform der Ebene E_2,

die durch Q geht und zu E_1 parallel verläuft: $E_2: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Durch Anwendung des DG entsteht die Koordinatengleichung der Ebene

$E_1: -2x_1 + x_2 + 3x_3 = (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = -5$

2. Aufgabe: Orthogonale Ebenen

Gegeben sei die Parametergleichung einer Ebene

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

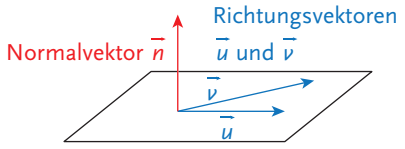

Abb. 10.4

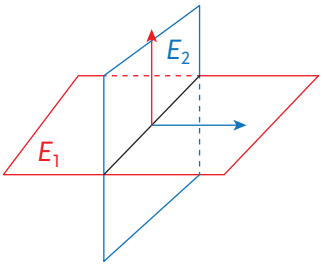

Abb. 10.5: Zwei zueinander orthogonale Ebenen E_1 und E_2

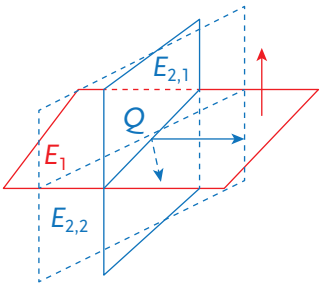

Abb. 10.6: Zwei zu E_1 orthogonale Ebenen $E_{2,1}$ und $E_{2,2}$ durch denselben Punkt Q

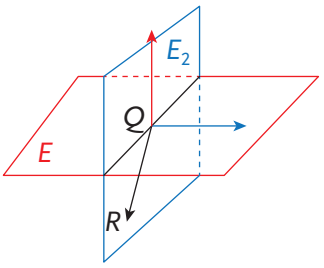

Abb. 10.7

a) Formen Sie die Parametergleichung in eine Normalenform der Ebenengleichung um (Abb. 10.4).

b) Bestimmen Sie zunächst eine Normalenform, dann eine Koordinatengleichung einer Ebene E_2, die auf E_1 senkrecht steht und durch den Punkt $Q(1|-3|2)$ geht. Orientieren Sie sich zunächst für die Bestimmung des Normalenvektors an Abbildung 10.5. Zeigen Sie durch Rechnung sowie unter Bezugnahme auf Abbildung 10.6, dass nicht nur eine, sondern unendlich viele durch Q gehende Ebenen zur Ebene E_1 orthogonal verlaufen.

c) Lösen Sie Aufgabe 2b), wenn die Ebene E_2, die auf E_1 senkrecht stehen soll, sowohl durch $Q(1|-3|2)$ als auch durch einen zweiten Punkt $R(2|-3|3)$ gehen soll. Beachten Sie, dass beiden Punkten ein Vektor zugeordnet ist. Orientieren Sie sich für die Bestimmung des Normalenvektors $\vec{n_2}$ der zu bestimmenden Ebene E_2 an Abb. 10.7.

Zu 2a

Gegeben sei die Parametergleichung einer Ebene

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Formen Sie die Parametergleichung in eine Normalenform der Ebenengleichung um!

Anfangsmethode

fragend-entwickelnde Methode des Frontalunterrichts

Denkanstoß des Lehrers

Um eine Normalengleichung der Ebene zu gewinnen, benötigen wir neben einem festen Punkt der Ebene einen Normalenvektor. Während sich die Koordinaten eines festen Punktes der Ebene aus der Parametergleichung ablesen lassen, müssen die Koordinaten des Normalenvektors der Ebene berechnet werden. Hierzu orientieren wir uns an Abb. 10.4 und beachten die gegenseitige Lage des zu bestimmenden Normalenvektors und eines jeden der beiden Richtungs- oder Spannvektoren und schließen aus dieser gegenseitigen Lage auf das damit jeweils verbundene Skalarprodukt.

Mögliche Schüleraussage

Der Normalenvektor, der auf der Ebene senkrecht steht, ist somit auch zu den beiden Spannvektoren dieser Ebene orthogonal. Folglich ist sowohl das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{u}$ als auch das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{v}$ gleich null.

Lehrerimpuls

Aus beiden Skalarprodukten resultiert ein LGS, dessen Lösung die Berechnung der Koordinaten des Normalenvektors erlaubt.