10 Normalenform der Ebenen- und Geradengleichung, *Hesse*-Normalenform, Abstandsberechnungen

10.1 Darstellung einer Ebene und einer Gerade mit Hilfe des Skalarprodukts

10.1.1 Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene und einer Geraden

1. Stunde

Stundenbild

Vorüberlegung

Je nach Unterrichtsverlauf ist in Frage gestellt, ob nach Herleitung der Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene die Normalengleichung einer Gerade in derselben Unterrichtsstunde thematisiert werden kann. Deshalb sollte bereits bei der Unterrichtsplanung eine mögliche Zäsur in Erwägung gezogen werden.
Um jedoch der Ganzheitlichkeit dieser Thematik gerecht zu werden, ist hier der vollständige relevante Kompetenzerwerb genau einer Unterrichtsstunde zugeordnet.

Die Schüler gewinnen folgende inhaltliche und prozessbezogene mathematische Kompetenzen:

– Ist P ein fester, X jeder beliebige Punkt einer Ebene, ist das Skalarprodukt $\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ eine Gleichung dieser Ebene.
– Ist der feste Punkt P und jeder beliebige Punkt X einer Ebene sowie der Normalenvektor $\vec{n}$ in Koordinaten gegeben, erhält man folgende Normalengleichung in Koordinaten:

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

– Durch Anwendung des Distributivgesetzes erhält man aus der Normalengleichung $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ die Koordinatengleichung $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$ der betrachteten Ebene.
– Durch Vergleich der über die Normalenform gewonnenen Koordinatengleichung $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$ mit der allgemeinen Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ erkennt man:
Die Koordinaten n_1, n_2, n_3 des Normalenvektors $\vec{n}$ entsprechen den Koeffizienten a, b und c. Der Wert des Skalarprodukts $\vec{n} \cdot \vec{p} = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$ entspricht dem Koeffizienten d.
– Ist genau eine Koordinate des Normalenvektors = 0, verläuft die Ebene parallel zu der entsprechenden Koordinatenachse.
– Sind *zwei* Koordinaten des Normalenvektors gleich null, verläuft die Ebene parallel zu der entsprechenden Koordinatenebene.

– Geht eine Ebene durch den Koordinatenursprung, erhalten wir folgende Normalengleichung und die hieraus resultierende Koordinatengleichung:

$$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=0$$

– Für die Normalengleichung einer Geraden, die im zweidimensionalen Koordinatensystem dargestellt werden soll, gilt:

$$g\colon \left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\end{pmatrix}=0$$

– Für die aus der Normalengleichung entstehende Koordinatengleichung einer Geraden im x_1,x_2-Koordinatensystem gilt:
$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$

– Hat eine Koordinate des zweidimensionalen Normalenvektors einer Gerade den Wert null, verläuft die Gerade parallel zur entsprechenden Koordinatenachse.

Unterrichtsschritte

a) Die Normalenform der Ebenengleichung

Anfangsmethode
fragend-entwickelnde Methode des Frontalunterrichts

Bezug nehmend auf die Schemazeichnung (vgl. Abb. 10.1) legt der Lehrer die Bedingungen fest, unter denen eine Ebene mit Hilfe des Skalarprodukts dargestellt werden soll:
P sei ein fester, X jeder beliebige Punkt einer Ebene E und $\vec{n}$ ein Vektor, der auf der Ebene senkrecht steht, ein sogenannter Normalenvektor. Da diesem festen Punkt P und jedem beliebigen Punkt X der Ebene jeweils ein Vektor zugeordnet ist, existieren auch unendlich viele Vektoren $\overrightarrow{PX}$ der Ebene E.

Tafelanschrift oder Projektion

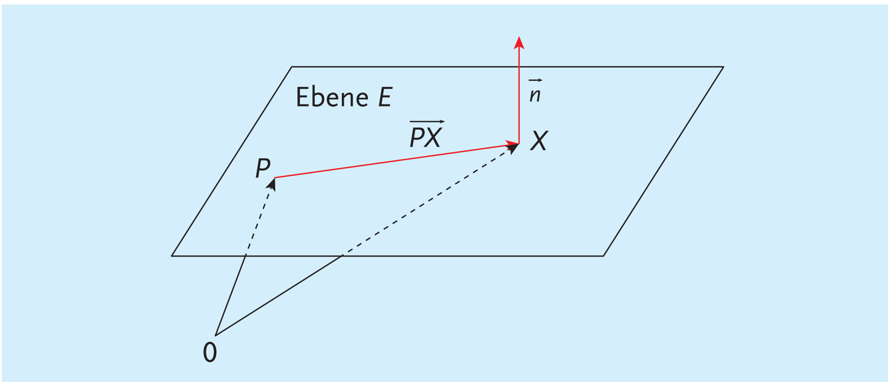

Abb. 10.1

Lehrerbehauptung/Lehrerimpuls

Die gegenseitige Lage des Normalenvektors $\vec{n}$ und eines jeden Vektors der Vektorenschar $\overrightarrow{PX}$ ist allein ausschlaggebend für die Festlegung der Ebene E mit Hilfe eines Skalarprodukts. Wenn diese Behauptung zutrifft, führt zwangsläufig das Skalarprodukt, welches aus der gegenseitigen Lage eines jeden Vektorenpaares $(\overrightarrow{PX}, \vec{n})$ resultiert, zu einer Ebenengleichung.