

8.3 Typische Aufgaben zur geometrischen Anwendung des Skalarprodukts

Stundenbild

3. Stunde

1. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zueinander orthogonal sind!

Methode

Stillarbeit: Jeder Schüler erbringt den verlangten Nachweis in selbstständiger Arbeit.

Präsentation

Ein vom Lehrer bestimmter Schüler überträgt seine Rechnung an die Tafel und erklärt:

Zwei Vektoren sind zueinander orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt = 0 ist.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$



Tafelanschrift

2. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Für welche Werte für a_1 und b_3 ($a_1, b_3 \in \mathbb{R}$) sind die Vektoren orthogonal?

Methode

eigenverantwortliches, arbeitsgleiches Arbeiten in Gruppen

Präsentation

Ein zufällig bestimmter Schüler einer Gruppe überträgt die Rechnung an die Tafel und erklärt.

Da vorausgesetzt wird, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ für bestimmte Werte der Koordinaten a_1 und b_3 orthogonal sind, setzen wir ihr Skalarprodukt = 0 und bestimmen über die erhaltene Gleichung die Bedingung für a_1 und b_3 .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ b_3 \end{pmatrix} = 3a_1 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot b_3 = 0 \Leftrightarrow 3a_1 = 2 + 3b_3$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{3} + b_3$$



Tafelanschrift

Erklärungen stichwortartig

Die über das Skalarprodukt gewonnene Gleichung $a_1 = \frac{2}{3} + b_3$ besagt:

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn bei Vorgabe jeder beliebigen reellen Zahl für die 3. Koordinate b_3 des Vektors $\vec{b}$ für die 1. Koordinate a_1 des Vektors $\vec{a}$ gilt: $a_1 = \frac{2}{3} + b_3$

3. Zeigen Sie, dass die sich schneidenden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufeinander senkrecht stehen.

Methode

eigenverantwortliches, arbeitsgleiches Arbeiten in Gruppen

Präsentation

Ein nach dem Zufallsprinzip bestimmter Schüler einer Gruppe überträgt die Rechnung an die Tafel und erklärt:



Tafelanschrift
Erklärung stichwortartig

Wenn die sich schneidenden Geraden aufeinander senkrecht stehen, sind ihre Richtungsvektoren zueinander orthogonal. Es gilt also zu überprüfen, ob das Skalarprodukt der Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ den Wert null ergibt:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0$$

Da das Skalarprodukt der Richtungsvektoren der sich schneidenden Geraden den Wert null ergibt, stehen die Geraden aufeinander senkrecht.

4. Gegeben seien die Punkte A, B und C. Bestimmen Sie den Winkel, den die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ einschließen.

Methode

eigenverantwortliches, arbeitsteiliges Arbeiten in Gruppen

Gruppe 1 bzw. Gruppe 1 und Gruppe 2

- a) $A(4|2|1)$; $B(2|2|0)$; $C(3|4|-2)$

Gruppe 2 bzw. Gruppe 3 und Gruppe 4

- b) $A(1|-2|3)$; $B(3|-3|6)$; $C(2|-2|1)$