5.2 Sonderformen der Koordinatengleichung einer Ebene und damit verbundene besondere Ebenenlagen im kartesischen Koordinatensystem

Stundenbild

Methode
fragen-entwickelnde Methode des frontalen Impulsunterrichts in Kombination mit eigenverantwortlichem Arbeiten in Gruppen und Partnerarbeit

2. Stunde

5.2.1 Einer der drei Koeffizienten a, b, c der Koordinatengleichung $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $b, c, d \neq 0$) ist gleich null.

Die Schüler erwerben folgende inhaltliche und prozessbezogene mathematische Kompetenzen:

- Weil der Koeffizient $a = 0$ ist, fehlt in der Koordinatengleichung $2x_2 + 8x_3 = 45$ der schiefen Ebene des Spielgeräts der vorigen Stunde das x_1-Glied. Dieses fehlende x_1-Glied führt zu einer Sonderform der Koordinatengleichung, welche offenbar die Parallelität dieser schiefen Ebene gerade zur x_1-Achse bedingt, wie der Aufbau des Spielgeräts verrät.
- Die Punktprobe mit allgemein definierten Punkten $X_1(z|0|0)$; $(z \in \mathbb{R})$ der x_1-Achse erbringt den Beweis für die vermutete Parallelität: Kein Punkt der x_1-Achse liegt in dieser Ebene. Dann muss die Ebene parallel zur x_1-Achse verlaufen.
- Jede Ebene, die über eine Koordinatengleichung der Form $b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ $(b, c, d \in \mathbb{R}$; $b, c, d \neq 0)$ beschrieben wird, in der wegen $a = 0$ das x_1-Glied fehlt, verläuft parallel zur x_1-Achse, wie die Punktprobe mit den Punkten $X_1(z|0|0)$ der x_1-Achse beweist.
- Das wegen $a = 0$ fehlende x_1-Glied in der Gleichung $b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ $(b, c, d \in \mathbb{R}$; $b, c, d \neq 0)$ impliziert eine freie Wahl der x_1-Koordinate bei der Bestimmung von Ebenenpunkten: Die x_1-Koordinate eines jeden Ebenpunktes muss nicht berechnet, sondern darf beliebig gewählt werden.
- Jede Ebene, welche über eine Koordinatengleichung der Form $b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = 0$; $b, c \neq 0$ beschrieben wird, beinhaltet die x_1-Achse.

Durch eigenverantwortliches Arbeiten gewinnen die Schüler weitere Erkenntnisse und Einsichten:

- Jede Ebene der Form $a \cdot x_1 + c \cdot x_3 = d$; $a, c, d \neq 0$, in der das x_2-Glied wegen $b = 0$ fehlt, verläuft parallel zur x_2-Achse, wenn $d \neq 0$ ist, wie die Punktprobe mit den Punkten $X_2(0|z|0)$; $(z \in \mathbb{R})$ der x_2-Achse beweist.
- Jede Ebene der Form $a \cdot x_1 + c \cdot x_3 = 0$; $a, c \neq 0$ beinhaltet die x_2-Achse, wie die Punktprobe beweist.
- Jede Ebene der Form $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = d$; $a, b, d \neq 0$, in der das x_3-Glied wegen $c = 0$ fehlt, verläuft parallel zur x_3-Achse, wie die Punktprobe mit den Punkten $X_3(0|0|z)$; $(z \in \mathbb{R})$ der x_3-Achse beweist.
- Jede Ebene der Form $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = 0$; $a, b \neq 0$, in der das x_3-Glied wegen $c = 0$ fehlt, beinhaltet die x_3-Achse.

Unterrichtsverlauf

Anfangsmethode

fragend-entwickelnde Methode

Der Lehrer nimmt Bezug auf die in der letzten Stunde aufgestellte Koordinatengleichung einer schiefen Ebene des hier relevanten Spielgeräts und schreibt die Gleichung an die Tafel:

$-2x + 8x_3 = 45$

Tafelanschrift

Lehrerimpuls

Diese Sonderform der Koordinatengleichung hat einerseits wegen des fehlenden x_1-Gliedes eine einfache formale Ursache, andererseits beinhaltet offenbar gerade das „Fehlen“ des x_1-Gliedes eine besondere Lage der schiefen Ebene des Spielgeräts im kartesischen Koordinatensystem.

Erwartete Schüleraussage

Die Koordinatengleichung enthält kein x_1-Glied, weil der Koeffizient $a = 0$ ist. Andererseits verläuft die über die Koordinatengleichung $-2x_2 + 8x_3 = 45$ beschriebene schiefe Ebene des Spielgeräts parallel zur x_1-Achse, wie wir in der letzten Stunde erkannt haben. Offenbar verläuft eine Ebene parallel zur x_1-Achse, wenn gerade das x_1-Glied wegen $a = 0$ in der Koordinatengleichung fehlt.

Lehrerimpuls

Die Punktprobe mit Hilfe allgemein definierter Punkte $X_1(z|0|0)$; $(z \in \mathbb{R})$, welche alle Punkte der x_1-Achse darstellen, erbringt den Beweis für diese Annahme.

Ein Schüler führt die Punktprobe durch und erklärt

Setzen wir die Koordinaten der Punkte X_1 der x_1-Achse in obige Koordinatengleichung ein, erhalten wir folgende falsche Aussage: $0 = 45$.

Hieraus folgt: Es gibt keinen Punkt der x_1-Achse, dessen Koordinaten die Ebenengleichung $-2x_2 + 8x_3 = 45$ erfüllen. Kein Punkt der x_1-Achse liegt somit in dieser Ebene. Folglich schneidet auch die x_1-Achse die Ebene nicht. Demnach muss die Ebene parallel zur x_1-Achse verlaufen.

Lehrerimpuls

Mit Hilfe der Punktprobe lässt sich auch zeigen, dass *alle* Ebenen parallel zur x_1-Achse verlaufen, die wie die schiefe Ebene des Spielgeräts durch eine Koordinatengleichung der Form $0 \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ $(b, c, d \in \mathbb{R};$ $b, c, d \neq 0) \Leftrightarrow b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ beschrieben werden, also durch eine Koordinatengleichung, in der das x_1-Glied fehlt.

Erwartete Schüleraussage

Setzen wir die Koordinaten der Punkte $X_1(z|0|0)$; $(z \in \mathbb{R})$ der x_1-Achse in diese Gleichung ein, erhalten wir wegen $d \neq 0$ die falsche Aussage $0 = d$. Demnach haben die x_1-Achse und die Ebene mit der Gleichung $b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$ keinen gemeinsamen Punkt.

Hieraus folgt:

Fehlt in der Koordinatengleichung einer Ebene das x_1-Glied, weil der Koeffizient $a = 0$ ist und ist zusätzlich der Koeffizient $d \neq 0$, verläuft die Ebene parallel zur x_1-Achse.