10.4 Festigung und Vertiefung: Berechnung des Erwartungswerts, der Varianz und der Standardabweichung; σ-Umgebungen des Erwartungswerts $\mu = E(X)$

4. Stunde

Methode
Teilweise fragend-entwickelnde Methode, teilweise eigenverantwortliches Arbeiten in Gruppen

Typische Anwendungsbeispiele

Methode
Teils fragend-entwickelnde Methode; teils eigenverantwortliches Arbeiten in Gruppen

1. Aufgrund von Erfahrungswerten weiß man, dass 5 % der von einer Maschine produzierten Werkstücke leichte Fehler aufweisen. Aus der sehr großen Zahl aller innerhalb eines größeren Zeitraums produzierten Werkstücke werden 20 nach dem Zufallsprinzip hintereinander gezogen und auf Fehler überprüft. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der hier zuständigen Zufallsvariablen *X*!

Lösung
Anhand dieses Beispiels soll gezeigt werden, dass in bestimmten Situationen auch ein *n*-faches „Ziehen *ohne* Zurücklegen" in ausreichender Näherung als *n*-stufiges *Bernoulli*-Experiment bzw. die zuständige Zufallsvariable als näherungsweise binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern *n* und *p* aufgefasst werden kann (vgl. auch später behandeltes Thema „Hypergeometrische Verteilung").

Methode
fragend-entwickelnde Methode

Wir beschränken uns hier auf die ausführliche Darstellung des Lösungswegs. Wir fassen eine solche 20-er-Serie als ein 20-stufiges *Bernoulli*-Experiment auf[2]. Die Zufallsvariable *X* bezeichnet die Anzahl der fehlerhaften Stücke und ist $B_{10;0,05}$-verteilt. Für den Erwartungswert gilt dann:
$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0,05 = 1.$
Antwort: Auf lange Sicht, d. h. bei einer ausreichend großen Zahl solcher 20-er Serien, wird man im Mittel 1 fehlerhaftes Werkstück vorfinden.

---

[2] Eigentlich ist ein *n*-stufigen *Bernoulli*-Experiment im Gegensatz zu diesem Beispiel als ein Ziehen von *n* Objekten *mit Zurücklegen* zu verstehen. Wenn das Gesamtkollektiv jedoch (hier die extrem große Zahl aller produzierten Werkstücke) sehr groß ist, wird bei einer Stichprobe von z. B. 20 gezogenen Werkstücken *ohne Zurücklegen* der prozentuale Anteil der fehlerhaften Stücke (hier 5 %) innerhalb des Gesamtkollektivs nur unwesentlich beeinträchtigt, sodass für jedes zu ziehende Werkstück die Wahrscheinlichkeit *p* (hier 5 %) und damit der Charakter des *n*-stufigen *Bernoulli*-Experiments in ausreichender Näherung erhalten bleibt.
Dieses Argument wird speziell für das o. a. Experiment noch dadurch untermauert, dass pro 20-er-Serie im Mittel nur $E(X) = 1$ fehlerhaftes Stück gezogen wird.

Für die Varianz gilt:

$$V(X) = n \cdot p \cdot q = 20 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}95$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}95} = 0{,}97$$

Nachfolgendes Beispiel bezieht sich auf σ-Umgebungen des Erwartungswerts μ einer binomialverteilten Zufallsvariable X bzw. den Bereich außerhalb solcher Umgebungen.

Methode
Eigenverantwortliches Arbeiten in Gruppen

2. Eine Zufallsvariable X sei $B_{50;0,05}$-verteilt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X Werte annimmt, die innerhalb der 2-fachen σ-Umgebung des Erwartungswerts μ liegen!

b) …, die um mehr als 2 · σ vom Erwartungswert abweichen.

(vgl. Thema „Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X", speziell hier: k-fache σ-Umgebungen des Erwartungswerts)

Lösung zu 2a

$$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}05 = 2{,}5;$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = 1{,}54$$

$$P\left(|X - \mu| \le 2 \cdot \sigma\right) = P(\mu - 2 \cdot \sigma \le X \le \mu + 2 \cdot \sigma)$$

$$= P(-0{,}58 \le X \le 5{,}58) = P(0 \le X \le 5)$$

Anwendung des speziellen Additionssatzes: entweder 0 oder 1 oder … oder 5 Erfolge:

$$B_{50;0,05}(0) + B_{50;0,05}(1) + \cdots + B_{50;0,05}(5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{50}{k} \cdot 0{,}05^k \cdot 0{,}95^{50-k}$$

$$= 0{,}077 + 0{,}202 + 0{,}261 + 0{,}22 + 0{,}136 + 0{,}066 = 0{,}96$$

Lösung zu 2b
$P(|X - \mu| > 2 \cdot \sigma)$
$|X - \mu| > 2 \cdot \sigma$ ist das *Gegenereignis* von $|X - \mu| \le 2 \cdot \sigma$.
Folglich gilt gemäß $P(E) = 1 - P(\overline{E})$:
$P(|X - \mu| > 2 \cdot \sigma) = 1 - P(|X - \mu| \le 2 \cdot \sigma) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$