

Ausführliche Erläuterungen für den Unterricht vor allem für Fachfremde und für Eltern

1 Didaktisch-methodische Grundsätze

1.1	Vorwort	2
1.2	Wesentliche Aspekte für den Anfangsunterricht in Mathematik	2
1.3	Wege für einen erfolgreichen Mathematikunterricht im Unterrichtsalltag	4
1.4	Grundvorstellungen zum Plus- und Minusrechnen im Zahlenraum bis 100	4
1.5	Grundvorstellungen zum Mal- und Geteiltrechnen im Zahlenraum bis 100	5
1.6	Zum Aufbau der Übungshefte und des Begleitheftes	7

2 Plus- und Minusaufgaben bis 100

2.1	Ausführliches Inhaltsverzeichnis des Arbeitsheftes	8
2.2	Konzeptionelle Übersicht zum Aufbau der Übungen	8
2.3	Lernvoraussetzungen	9
2.4	Didaktisch-methodische Hinweise zu den Übungsseiten	9

Rechenwegbeschreibungen, Sprechansätze und weitere Lernideen zum Üben und Fördern zu jeder Aufgabe der Arbeitshefte

3 Mal- und Geteiltaufgaben bis 100

3.1	Ausführliches Inhaltsverzeichnis des Arbeitsheftes	26
3.2	Konzeptionelle Übersicht zum Aufbau der Übungen	26
3.3	Lernvoraussetzungen	27
3.4	Didaktisch-methodische Hinweise zu den Übungsseiten	27

4 Kopiervorlagen

	Tiger Titus und Lama Linus	49
--	----------------------------	----

1 Didaktisch-methodische Grundsätze

1.1 Vorwort

Dieses Begleitheft und die dazu entwickelten Arbeitshefte haben das Ziel, Lehrkräfte und Eltern in ihren Bemühungen zum Aufbau mathematischer Grundkompetenzen im Rechnen bei Kindern bzw. Lernenden zu unterstützen. Dazu wurde ein durchgehendes Lernkonzept erarbeitet, um grundlegendes mathematisches Denken beim Rechnen schrittweise zu entwickeln.

Das Übungsheft „Plus- und Minusaufgaben bis 100“ knüpft unmittelbar an das Konzept der Übungshefte „Plus- und Minusaufgaben bis 10“ sowie „Plus- und Minusaufgaben bis 20“ an und setzt das Addieren und Subtrahieren mit natürlichen Zahlen im neuen Zahlenraum bis 100 fort.

Das Übungsheft „Mal- und Geteiltaufgaben bis 100“ behandelt die Grundrechenoperationen Multiplikation und Division.

Beide Übungshefte haben das Ziel, das Verständnis zu den Grundrechenoperationen und damit wesentliche Kompetenzen im Addieren und Subtrahieren sowie im Multiplizieren und Dividieren im Zahlenraum bis 100 aufzubauen.

Für das Lösen der Plus- und Minusaufgaben bis 100 sind die Rechensätze des kleinen Einspluseins bzw. Einsminuseins von grundlegender Bedeutung. Diese Rechensätze werden dabei weiter gefestigt und die Kompetenzen im Addieren und Subtrahieren ausgebaut.

Das Rechnen von Mal- und Geteiltaufgaben bis 100 umfasst die Aufgaben des kleinen Einmaleins bzw. Einsdurch-eins. Durch das Üben der Grundaufgaben zum Multiplizieren und Dividieren sollen insbesondere Kompetenzen im gedächtnismäßigen Einprägen der Mal- und Geteiltaufgaben erzielt und das Verständnis zu diesen Grundrechenoperationen vertieft werden.

Den didaktisch-methodischen Hinweisen zum Erlernen des Rechnens liegen aktuelle Forschungsergebnisse zu Lehr- und Lernprozessen im Unterrichtsfach Mathematik zugrunde.

Die Analyse typischer Verhaltensweisen beim Lösen von Mathematikaufgaben bei Kindern mit besonderen Schwierigkeiten war eine Voraussetzung zur Erarbeitung der vorliegenden Übungshefte. Einbezogen in das Aufgabenkonzept wurden eigene unterrichtspraktische Erfahrungen, die Analyse von zahlreichen Lernbiografien von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen sowie empirische Untersuchungen des Mathematikunterrichts bei erfolgreichen Mathematiklehrkräften. Auch der Vergleich von Auffälligkeiten im Lernprozess von leistungsschwachen mit leistungsstarken Schülerinnen und Schülern erbrachte wesentliche Merkmale für ein erfolgreiches Lernen.

Für das Erlernen des Rechnens wurden daraufhin spezielle Übungshefte entwickelt.

1.2 Wesentliche Aspekte für den Anfangsunterricht in Mathematik

Mathematik ist wie ein Haus, welches nur dann erfolgreich gebaut werden kann, wenn das Fundament solide errichtet wird. Dieses Fundament wird in der Grundschule gelegt. Lücken, die hier entstehen, können selten in den „höheren Etagen“ problemlos geschlossen werden. Das „Haus der Mathematik“ steht dann auf wackligen Füßen.

Lernende mit Problemen in Mathematik (egal, welcher Altersstufe) helfen sich oft mit unvollständig verstandenen und nur kurzzeitig angelernten Lösungen und Schrittfolgen – ohne dabei informationsgebende, mathematische Muster und Strukturen zu erkennen und zu nutzen. Dazu kommen eine wachsende Unsicherheit, mangelnde Lernfreude und fehlende Erfolgserlebnisse, was das Interesse an Mathematik stark reduziert. Um hier Abhilfe zu schaffen, sollte der Lernprozess im Unterrichtsfach Mathematik durch folgende Merkmale geprägt sein:

Rechnen lernen durch proaktives Handeln

Grundlage für eine schrittweise Kompetenzentwicklung im Rechnen ist ein proaktives (bewusstes, selbstbestimmtes) Handeln. Ausgangspunkt ist ein Rechnen durch Handeln mit Lernmaterial und Veranschaulichungsmitteln. Der gesamte Lernprozess muss ein Durchlaufen verschiedener Repräsentationsebenen ermöglichen. Folgende Aktivitäten spielen eine wichtige Rolle:

- Nachspielen von Rechenaufgaben
- Erzählen sowie Ausdenken und Vorspielen von Rechengeschichten
- Veranschaulichen von Rechenaufgaben mit didaktischem Material
- Darstellen von Rechenaufgaben durch Abbildungen, welche an das verwendete Material anknüpfen
- Beschreiben und Aufschreiben eigener Rechenwege, Handlungen und Denkschritte zum Lösen einer Aufgabe
- Erkennen und Nutzen von arithmetischen Mustern und Strukturen in einer Aufgabenserie zur Lösungsfindung und zum tieferen Verständnis der einzelnen Rechenoperationen
- Entwickeln von Eigenaufgaben zu bestimmten Aufgabentypen
- Trainieren von Rechensätzen zum Automatisieren der Grundaufgaben: kleines Einspluseins bzw. Einsminuseins sowie kleines Einmaleins bzw. Einsdurch-eins

Das Rechnenlernen erfolgt am besten schwierigkeitsgestuft in vielen, aufeinander abgestimmten Schritten. Die Schrittwei-

te richtet sich nach der Leistungsstärke der Kinder. Haben sie besondere Schwierigkeiten bei einer Rechenoperation oder bei einem Aufgabentyp, sind die Lernschritte besonders klein zu wählen. Neuer Lernstoff darf auch nicht zu komplex sein. Die Kinder müssen den Rechenschritten durch eigene geistige Aktivität immer folgen können. Dann werden die Lernenden erlernte Aufgabentypen in neuen Lernschritten wiedererkennen. Beim Rechnen können sie bereits vorhandene Kompetenzen nutzen und bei neuen Anforderungen einbringen.

Rechnen lernen durch begleitendes Sprechen

Das Rechnen wird dem Lernenden erst verständlich, wenn es durch unmittelbares Besprechen der Rechenschritte begleitet wird. Das aktive Sprechen des Kindes beinhaltet das Beschreiben eigener Vorstellungen zu Zahlen und zum Rechnen, das Erklären von Rechenschritten, das Kommunizieren und Argumentieren mit anderen Lernenden oder mit den Lehrenden über Aufgabenstellungen, über Lösungswege und über Rechenfehler. Dazu gehört aber auch einfaches Nachsprechen und Aufsagen von Rechensätzen.

Ähnliches gilt auch für das Schreiben. Das beginnt bei Schreibaktivitäten von Rechensätzen bis hin zur Anfertigung eines Rechentagebuches. Bei Schulanfängern mit geringen Schreibkenntnissen geht es beim Schreiben zunächst nur um das Notieren von formalen Rechensätzen oder um das Ergänzen von Zeichen und Zahlen in „Lückentexten“ zu vollständigen Rechensätzen.

Eine Rechenaufgabe ist erst dann vollständig bearbeitet, wenn der eigene Rechenweg auch beschrieben und begründet werden kann. Die Eigenaktivitäten der Lernenden und das „Sprechen“ über das Rechnen und Schreiben von Rechensätzen mit der Hand „bringt die Mathematik ins Gehirn“. Das ist ein wichtiger und in der Praxis häufig zu wenig genutzter „Verstehenskanal“.

Anregungen zum Sprechen sind zum Beispiel:

- *Wie hast du das gerechnet? Erkläre dein Vorgehen.*
- *Wie bist du darauf gekommen?*
- *Stimmt das Ergebnis? Begründe deine Entscheidung.*
- *Kannst du das auch noch anders rechnen?*
- *Warum ist das so? Ist das immer so?
Welches Muster erkennst du?*
- *Was bleibt in den Aufgaben einer Aufgabenserie immer gleich? Was verändert sich?*
- *Welchen Zusammenhang erkennst du?*
- *An welcher Stelle kommst du nicht weiter?
Bei welchem Rechenschritt bist du unsicher?*
- *Vergleiche verschiedene Rechenwege.*
- *Wo steckt in der Rechnung ein Fehler?*
- *Wodurch kannst du leichter (vorteilhafter) rechnen?*

Rechnen lernen durch ein geeignetes Arbeiten mit Aufgaben

Grundlegende Aktivitäten (Handeln mit Lernmaterial, Darstellen von Rechenschritten in Abbildungen, Sprechen über Rechenwege, Schreiben und Lösen von Rechenaufgaben) gehören zu einem erfolgreichen Lernprozess. Man kann beispielsweise an einem Bodenbild eines Zahlenstrahls zunächst eine Aufgabe abschreiten, nachfolgend die Aufgabe an einem Zahlenstrahl und den Rechensatz auf einem Arbeitsblatt eintragen und schließlich den eigenen Rechenweg beschreiben.

Eine andere Möglichkeit für ein geeignetes Arbeiten mit Aufgaben ist der Beginn mit einer selbst ausgedachten Rechengeschichte. Daran anschließend wird die Aufgabe mit Legematerial am Zahlenfeld gelegt und abschließend der Rechensatz ins Heft eingetragen.

Jede Aktivität (materialgeleitet handeln, auf dem Arbeitsblatt einzeichnen, Rechenschritte beschreiben und erklären, Rechengeschichten spielen, Rechensätze aufsagen und notieren) kann am Anfang, dazwischen oder am Ende einer Aktivitätskette stehen.

Es ist darauf zu achten, dass die Aufgaben immer eine echte Herausforderung sind, wie zum Beispiel:

- Legen einer Aufgabe mit Material auf einem Rechenfeld
- Zeichnen einer Aufgabe am Zahlenstrahl oder Rechenstrich
- Notieren der Aufgabe bzw. des kompletten Rechensatzes
- Durchschauen der Veranschaulichung einer dargestellten Rechenaufgabe
- Beschreiben und Begründen der einzelnen Rechenschritte
- Wissen um Zusammenhänge: zwischen Plus- und Minusaufgaben, zwischen Mal- und Geteiltaufgaben, zwischen Plus- und Malaufgaben, zwischen Minus- und Geteiltaufgaben
- Einprägen, Automatisieren und gedächtnismäßiges Reproduzieren der behandelten Rechensätze
- Erkennen von mathematischen Mustern und Strukturen innerhalb einer Aufgabenserie

Mindestens einer dieser Aspekte sollte immer eine Herausforderung für die Kinder darstellen, um genau diesen Aspekt dann zu üben. Die Kinder müssen dabei spüren, dass sie vorankommen und erfolgreich lernen. Das Gefühl, eine neue „Hürde“ genommen und wieder ein Stück vorangekommen zu sein, ist ein wichtiger Motivationsmotor (und sei die Hürde noch so niedrig, das Stück noch so klein).

Wenn eine Aufgabe aber keine echte Herausforderung mehr ist – so etwas wie eine „Wohlfühlaufgabe“ wird –, bemerkt man bei Kindern bald als Reaktion, dass sie in ihrer Aktivität wieder nachlassen. Flüchtigkeitsfehler und Desinteresse können sich so langsam einstellen.

Die Vermeidung eines zu schnellen Voranschreitens ist ebenso wichtig. Die Lehrkraft muss immer genau erkennen, wann der richtige Zeitpunkt für einen neuen Lernschritt, also

für eine neue Herausforderung, gekommen ist. Wohlfühlaufgaben sind auf Dauer kontraproduktiv. Das wird von Kind zu Kind innerhalb einer Klasse immer unterschiedlich sein.

Rechnen lernen durch ein auf den individuellen Leistungsstand abgestimmtes Üben

Üben ist das Kernstück des Mathematikunterrichts und erfordert ein geeignetes Übungskonzept. Das Entscheidende an einer Übung ist das Sichern von Erfolgserlebnissen. Die Kinder müssen aus jeder Übung mit einem Erfolgserlebnis gehen.

Das ... kannst du schon, prima! Hier bei diesem Rechenschritt ... hast du dich verbessert!

Eine unverzichtbare Übungsform ist tägliches Fünf-Minuten-Training. Hier geht es um das Aktivieren bereits behandelte und geübte Rechensätze, aber auch um das Wissen über Zahlen und ihre Darstellung. Vorhandene Kompetenzen werden aktiviert und können für das weitere Lernen abgerufen werden.

Bei allen Übungen und Lernproben ist zu entscheiden, ob noch Hilfsmittel zur Unterstützung oder zur Kontrolle verwendet werden. Solange die Kinder an einem Hilfsmittel festhalten und es ihnen Sicherheit gibt, sollten sie es nutzen.

Eine besondere Übungsform ist das Arbeiten mit Eigenaufgaben: *Denke dir eine ähnliche Rechenaufgabe aus und schreibe sie auf. Beschreibe, wie du beim Lösen vorgehst. Stelle die Aufgabe anderen Kindern.*

Eigenaufgaben geben der Lehrkraft außerdem wichtige diagnostische Informationen.

1.3 Wege für einen erfolgreichen Mathematikunterricht im Unterrichtsalltag

Häufig sind über 25 Kinder in einer Schulklasse und jedes Kind verknüpft Wissens Elemente anders und in unterschiedlicher Geschwindigkeit. Das erfordert ein Unterrichtskonzept, das möglichst alle Kinder im Blick behält.

Für einen erfolgreichen Mathematikunterricht mit allen Kindern der Klasse sollten gemeinsame Aktivitäten, das Arbeiten in Kleingruppen und individuelle Übungsphasen innerhalb einer Unterrichtsstunde einander ablösen. Für welche der drei Arbeitsweisen dann die meiste Zeit eingeplant wird, ist immer unterschiedlich und ergibt sich aus dem konkreten Unterrichtsverlauf und aus der Zielstellung. Kinder mit besonderen Schwierigkeiten in Mathematik benötigen immer eine zusätzliche individuelle Förderung.

Bei den Aktivitäten ist es oft ausreichend, dass immer nur eine ausgewählte Rechenaufgabe im Mittelpunkt steht. Hier gilt ganz besonders der Grundsatz: „Weniger ist mehr.“

Allein bei einer Aufgabe bzw. zu einem Rechensatz können viele Aktivitäten ausgeschöpft werden, z. B.:

- gemeinsames Sprechen sowie individuelles Erklären der Ideen und Vorstellungen eines Kindes
- Veranschaulichen des Rechenweges mit unterschiedlichen Möglichkeiten bzw. Materialien
- Darstellen eines Rechenweges auf Ideenblättern
- Erzählen und Nachspielen von Rechengeschichten
- gemeinsames Lösen und Besprechen der Aufgaben durch die Kooperation von leistungsstarken Kindern (Experten) mit leistungsschwachen Kindern

Dabei sollte uns immer bewusst sein: Mathematik ist ein übungsintensives Fach. Das Rechnenlernen ist vergleichbar mit dem Erlernen eines Instruments oder mit Trainingseinheiten eines Sportlers. So wichtig im Lernprozess abgestimmte, operative und strukturierte Übungen oder ein entdeckendes Lernen sind, so notwendig sind auch im gleichen Maße „einfach gestrickte“ Übungen für alle Kinder mit dem Ziel des schrittweisen Automatisierens und Auswendiglernens der Rechensätze. Ein unverzichtbarer Zugang zum Rechnenlernen ist das Eintrainieren von Rechensätzen. Will man ein Instrument lernen, müssen bestimmte „Handgriffe“ beharrlich wiederholt werden, will ein Sportler eine bestimmte Turnübung erlernen, muss er ausdauernd einen bestimmten Bewegungsablauf wiederholt trainieren. In der Mathematik ist das nicht anders. Den allerwenigsten Lernenden fallen die Rechensätze ohne beharrliches und ausdauerndes Üben zu. Hierzu können die täglichen Übungen, aber auch andere Unterrichtsphasen, genutzt werden.

Das Üben eines bestimmten Rechensatzes kann, wie bereits ausgeführt, recht vielfältig sein:

- *Erkläre die Rechenschritte.*
- *Zeige die Aufgabe am Rechenstrich oder am Punktfeld.*
- *Wie heißt der fertige Rechensatz?*
- *Wir sprechen den Rechensatz noch einmal gemeinsam.*
- *Wir notieren den Rechensatz in unser Merkheft.*
- *Wir überlegen uns zu dem Rechensatz alle dazugehörigen Aufgaben, mögliche Rechenschritte, Umkehraufgaben oder Nachbaraufgaben.*
- *Welchen Rechensatz kannst du schon auswendig? Finde andere Rechensätze mit dem gleichen Ergebnis.*
- *Welche Rechensätze haben wir gestern gelernt?*
- *Erfinde zu dem Rechensatz eine Rechengeschichte.*

1.4 Grundvorstellungen zum Plus- und Minusrechnen im Zahlenraum bis 100

Für das Plus- und Minusrechnen im Zahlenraum bis 100 knüpfen wir nahtlos an die bereits bekannten Grundvorstellungen und Arbeitsmittel aus dem Zahlenraum bis 20 an. Wir gehen dabei von folgender Struktur eines Rechen-

satzes aus: „Ruhende Zahl plus bzw. minus handelnde Zahl = Ergebnis bzw. Ergebniszahl.“

Aus der Vielzahl möglicher Rechenstrategien stützen wir unser Übungskonzept auf das Zerlegen der handelnden Zahl, um immer schrittweise (ausgehend von der ruhenden Zahl) zunächst bis zum Zehner und dann darüber hinaus zu rechnen. Wir halten es für sinnvoll, alle dabei verwendeten Rechensätze zu notieren, um so die Vorgehensweise auch im Nachhinein reflektieren bzw. begründen zu können. Dadurch wird ein intensives, ausführliches und somit verständnisvolles Behandeln einer Rechenaufgabe möglich.

Zur Veranschaulichung wird zunächst das bekannte Zwanzigerfeld in seiner Struktur erweitert auf das Hunderterfeld. Die ersten Übungen beginnen immer mit einer Veranschaulichung an einem Legebild eines entsprechenden Hunderterfeldausschnitts (Abb. 1). Die Legeregeln für das Arbeiten mit Plättchen entsprechen dem Vorgehen beim Rechnen bis 20.

Für weitere Übungen folgt die Veranschaulichung am Zahlenstrahl. Dabei wird der Zahlenstrahl zunächst als Ausschnitt verwendet und dann zum Rechenstrich vereinfacht (Abb. 2). Insbesondere beim Plus- und Minusrechnen bis 100 erweist sich der Rechenstrich als ein sehr praktikables Veranschaulichungsmittel. Konkrete Hinweise findet man in den Kommentaren zu den einzelnen Übungsseiten.

Für das Subtrahieren mit natürlichen Zahlen ist immer zu beachten, dass das Minusrechnen nur eine eingeschränkt ausführbare Rechenoperation ist. Nur Minusaufgaben, bei denen die ruhende Zahl größer als die handelnde Zahl oder zumindest gleichgroß ist, sind lösbar.

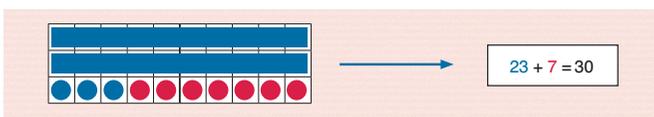


Abb. 1

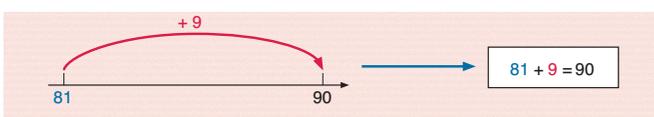


Abb. 2

1.5 Grundvorstellungen zum Mal- und Geteiltrechnen im Zahlenraum bis 100

Nachfolgend werden zunächst einige fachliche Grundlagen zum Malrechnen umrissen. Alle Ausführungen beziehen sich (wie schon bei den Plus- und Minusaufgaben) auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen.

Das Malrechnen (die Multiplikation) ist eine Rechenoperation zweiter Stufe. Es steht über der Addition als Rechenoperation erster Stufe. Ausgangspunkt für das Erlernen des Malrechnens ist das (mehrfache) Addieren derselben Zahl.

Beispielsweise kann die Plusaufgabe $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ kürzer durch die Malaufgabe $5 \cdot 3$ beschrieben werden.

Kinder lernen das Malrechnen bzw. Malnehmen durch Handlungen kennen, die ein Vervielfachen einer bestimmten Zahl beschreiben bzw. darstellen. Entsprechende Handlungen sollten die Kinder selbst ausführen und auch beschreiben. „Vervielfachen“ bedeutet z. B., eine feste Anzahl zu verdoppeln (verdreifachen, verzehnfachen, fünfmal so viele bilden usw.). Besondere Vielfache sind außerdem das „Ein(s)fache“ und das „Nullfache“.

Geeignete Rechengeschichten sind z. B.:

- *Bring mir bitte dreimal 2 Bausteine. Wie viele Bausteine habe ich dann?*
- *Auf dem Tisch liegen 3 Hefte. Ich brauche viermal so viele. Wie viele Hefte brauche ich insgesamt?*
- *Geh bitte zweimal zum Tisch und bringe immer 5 Würfel mit. Wie viele Würfel hast du dann gebracht?*
- *In einem Karton sind Säckchen mit je 5 Glaskugeln. Insgesamt liegen 10 solcher Säckchen in dem Karton. Wie viele Glaskugeln sind in diesem Karton?*

Solche Rechengeschichten werden erst durch Nachspielen lebendig gemacht. Diese Erlebnisse sind oft nachhaltig und bleiben in Erinnerung. Sie ermöglichen eine dynamische Betrachtung des Malnehmens (zeitlich-sukzessive Vorstellung). Derartige Grundvorstellungen zum Malnehmen sind insbesondere in der Einführung sehr wichtig. Bei der Einführung des Malrechnens kann immer ein Bezug zu der zugehörigen Plusaufgabe als Proberechnung genutzt werden.

Um Malaufgaben besprechen und erklären zu können, ist es sinnvoll, mit anschaulichen und einfachen Begriffen zu arbeiten.

In der Mathematik hat ein Rechensatz zur Multiplikation die Form „Faktor · Faktor = Produkt“.

Die zur Plusaufgabe $4 + 4 + 4$ gehörende Malaufgabe $3 \cdot 4$ besteht aus den beiden Faktoren 3 und 4. Um die beiden Faktoren zu unterscheiden, werden die Begriffe „Multiplikator“ (in unserem Beispiel die Zahl 3) und „Multiplikand“ (in unserem Beispiel die Zahl 4) verwendet. Im einfachsten Fall benutzen die Kinder zur Verständigung die Begriffe „die 1. Zahl“ und „die 2. Zahl“ der Aufgabe. Die Verwendung der Begriffe „ruhende Zahl“ und „handelnde Zahl“ ist im Schulunterricht weniger verbreitet. Bei der Aufgabe $3 \cdot 4$ wäre 4 die ruhende Zahl (sie bleibt bei allen Malaufgaben der Viererreihe unverändert) und 3 die handelnde Zahl. Diese handelnde Zahl beschreibt die gewünschte Vervielfachung. Den Term $3 \cdot 4$ bzw. die Zahl 12 nennt man „das Produkt“. Die Grundschul Kinder verwenden den Begriff „Ergebniszahl“ oder eventuell auch „das (errechnete) Vielfache“.

Welche Begriffe in der Kommunikation verwendet werden, entscheidet letztlich die Lehrkraft. In unseren Kommentaren zu den Übungen geben wir deshalb meistens auch mehrere Möglichkeiten an.

Zur Veranschaulichung wird wieder das Hunderterfeld in spezifizierter Form genutzt. Es ist möglich, diese Veranschaulichung durch schrittweises Auflegen von Plättchen oder durch Verwendung eines Abdeckstreifens bzw. Abdeckwinkels zu erzeugen (vgl. die Aufgabe $7 \cdot 8$ in Abb. 3).

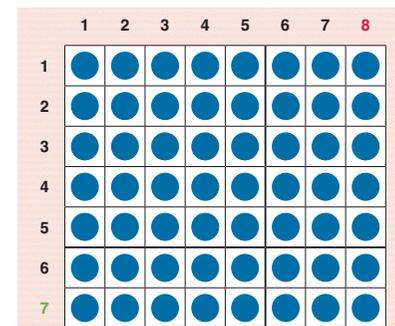


Abb. 3

Ein Punktebild ermöglicht eine räumlich-simultane Veranschaulichung der Malaufgabe. Jede Malaufgabe hat dabei immer eine Rechteckform. Die Aufgabe kann an den Randzahlen abgelesen werden.

Wesentliches Ziel der Übungen ist die Automatisierung des kleinen Einmaleins. Dazu beginnen wir beim Malnehmen mit 1 und 0. Das sind Aufgaben, die häufig zu wenig geübt werden und später oft zu Rechenfehlern führen.

Das Erlernen der einzelnen Malfolgen beginnt mit den sogenannten Kernaufgaben, die einen schrittweisen und schwierigkeitsgestuften Einstieg in die Malfolgen ermöglichen. Das sind die Malfolgen mit 2, 10 und 5. Es folgen verwandte Malfolgen mit 3, 6, 9 sowie 4 und 8. Abschließend wird dann die Malfolge mit 7 geübt. Beim Erlernen der Malfolgen helfen (ähnlich wie beim Plusrechnen) Tauschaufgaben und Nachbaraufgaben.

Zum kleinen Einmaleins bilden die zugehörigen Umkehraufgaben bzw. die entsprechenden Geteiltaufgaben die zu automatisierenden Grundaufgaben der Division. Sie werden auch als kleines Einsdurcheins bezeichnet.

Das Geteiltrechnen mit natürlichen Zahlen ist eine eingeschränkt ausführbare Rechenoperation: Bildet man aus zwei beliebigen natürlichen Zahlen eine Geteiltaufgabe, muss diese nicht in jedem Fall eine natürliche Zahl als Lösung besitzen. Beispielsweise ist die Aufgabe $2 : 3$ für natürliche Zahlen nicht lösbar.

Das Geteiltrechnen (die Division) ist eine Rechenoperation zweiter Stufe. Es steht über der Subtraktion als zugehöriger

Rechenoperation erster Stufe. Jede Geteiltaufgabe könnte deshalb auch als Minusaufgabe gelöst werden, wenn statt des Teilens ein (mehrfaches) Abziehen des Teilers bis zum Ergebnis 0 erfolgt.

So ist in der Geteiltaufgabe $15 : 3$ die 15 ein Vielfaches von 3 bzw. ist die 3 ein Teiler von 15. Das Ergebnis dieser Aufgabe gibt an, wie oft der Teiler 3 in der 15 enthalten ist. Die zugehörige Minusaufgabe ist $15 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3$. Um von 15 zur Zahl 0 zu gelangen, wird fünfmal die 3 abgezogen. Das Ergebnis ist damit 5. Deshalb kann das Ergebnis der Geteiltaufgabe $15 : 3$ mit der Minusaufgabe $15 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3$ kontrolliert werden.

Da vor der Behandlung der Geteiltaufgaben aber bereits das kleine Einmaleins intensiv geübt und erlernt wurde, ist es u. E. nicht sinnvoll, das kleine Einsdurcheins über eine Minusaufgabe einzuführen, sondern als Umkehrung des Malrechnens.

Die Kinder lernen das Geteiltrechnen wieder durch Handlungen kennen. Diese können entweder durch ein „Aufteilen“ (die Anzahl der Elemente einer Teilmenge ist bekannt, die Anzahl der Teilmengen wird gesucht) oder ein „Verteilen“ (Anzahl der Teilmengen ist bekannt) beschrieben werden. Entsprechende Handlungen sollten die Kinder selbst ausführen und auch erklären.

Geeignete Rechengeschichten sind z. B.:

- In einer Klasse lernen 27 Kinder. Die Kinder sollen sich in Dreiergruppen aufteilen. Wie viele Gruppen entstehen? (Aufteilen)
- In einer Klasse lernen 27 Kinder. Die Kinder sollen 3 gleichgroße Gruppen bilden. Wie viele Kinder gehören immer zu einer Gruppe? (Verteilen)
- In einem Karton sind 18 Nektarinen. Für einen Verkaufsstand werden Netze mit je 3 Nektarinen gefüllt. Wie viele Netze kannst du damit füllen? (Aufteilen)
- In einem Karton sind 18 Nektarinen. Für einen Verkaufsstand sollen die Nektarinen in 6 Netze gleichmäßig verteilt werden. Wie viele Nektarinen kommen in jedes Netz? (Verteilen)

Rechengeschichten ermöglichen den Aufbau von Grundvorstellungen zum Geteiltrechnen und sind gerade in der Einführung wichtig. Der Unterschied zwischen Aufteilen und Verteilen wird aber nicht näher thematisiert. Andere Interpretationen ermöglichen Überlegungen zum „Enthaltensein“, z. B. kann bei den ersten beiden Rechengeschichten auch gefragt werden: *Wie oft passt die 3 in die 27? Welches ist der dritte Teil von 27?*

Um das Geteiltrechnen zu erklären und darüber zu kommunizieren, werden einfache Begriffe benutzt. In der Mathematik hat eine Divisionsaufgabe die Form „Dividend : Divisor = Quotient“.

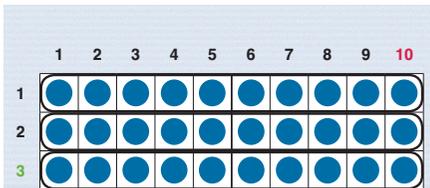


Abb. 4

Die Kinder können die Begriffe „die Ausgangszahl“, „die 1. Zahl“ oder „das (zu teilende) Vielfache“ für Dividend benutzen. Die Begriffe „die 2. Zahl“, „die Teilerzahl“ oder einfach „der Teiler“ stehen für den Divisor und der Begriff „Ergebniszahl“ für den Quotienten. Die Verwendung der Begriffe „ruhende Zahl“ und „handelnde Zahl“ ist weniger gebräuchlich. So wäre bei der Aufgabe $12 : 4$ die 4 die ruhende Zahl (sie bleibt bei allen Geteiltaufgaben beim Teilen durch 4 unverändert) und 12 die handelnde Zahl. Diese wird gleichmäßig aufgeteilt.

Als Hilfsmittel wird wieder das Punktfeld verwendet. Es ermöglicht die Veranschaulichung der Aufgaben durch Auflegen von Plättchen in gleichlangen Reihen. Die Veranschaulichung hat prinzipiell die gleiche „Rechteck-Struktur“ wie die zugehörige Malaufgabe (Umkehraufgabe). Das Legebild entsteht schrittweise. Aus dem fertigen Legebild kann der Teiler bei den oberen Randzahlen und das Ergebnis (bei den linken Randzahlen) abgelesen werden (Abb. 4).

Wesentliches Ziel zum Üben der Geteiltaufgaben ist die Automatisierung des kleinen Einsdurchheins. Das Erlernen der Geteiltfolgen erfolgt in der gleichen Reihenfolge wie beim Malrechnen, um einen schwierigkeitsgestuften Einstieg in die Geteiltfolgen zu ermöglichen. Beim Erlernen helfen insbesondere die bekannten Malaufgaben als Umkehraufgaben.

1.6 Zum Aufbau der Übungshefte und des Begleitheftes

Die einzelnen Übungshefte sind so aufgebaut, dass die Lernschritte immer aufeinander abgestimmt sind. Erst wenn die Aufgaben zu einem Lernschritt gut gelöst werden können, kann zum nächsten Lernschritt übergegangen werden. Gegebenenfalls müssen die Übungen wiederholt oder ähnliche weitere Aufgaben geübt werden.

Wesentliche Aspekte einzelner Lernschritte der Übungshefte werden erläutert. Besonders wichtig für das Verstehen einer Rechenaufgabe ist die damit verbundene Besprechung. Dazu wurden Vorschläge für Aufgabenstellungen, oder wie die Kinder ihren Rechenweg beschreiben bzw. begründen können, eingefügt (jeweils kursiv).

Diese kursiv gedruckten Hinweise zeigen oft sehr umfangreich den kompletten Inhalt (teilweise in Varianten) eines fiktiven Lerngesprächs an und beschreiben Möglichkeiten und Bausteine zur Beschreibung der Rechenschritte durch die Kinder. Außerdem werden Fragen für Sprechansätze und Antworten oder Kommentare der am Lernprozess beteiligten Personen angegeben. Diese kursiven Inhalte sollen Aktivitäten im Kommunizieren anregen. Sie sind nicht als komplett abzuarbeitende Gesprächsprotokolle zu verstehen.

Es ist wichtig darauf zu achten, dass die Kinder mit eigenen Worten Erklärungen für ihre Handlungen und zu ihren Vorstellungen beim Rechnen vollständig wiedergeben können.

Das gemeinsame Kommunizieren kann zusätzlich durch die Lernidee „Ich rechne mit deinem Lösungsweg“ ergänzt werden: Kinder beschreiben der Lehrkraft oder einem Mitschüler (Experten) ihre Handlungen am Zahlenfeld, am Zahlenstrahl bzw. am Rechenstrich mit Material, an einer Abbildung oder nur aus ihrer Vorstellung heraus. Der Zuhörer führt die Beschreibung aus und bespricht mit dem Kind die Lösung. Er bekommt so Hinweise, wie weit bereits das Verständnis zum Rechnen bzw. die Rechenkompetenzen ausgebildet sind.

Zu Beginn können Erklärungen zur Durchführung der Handlungen mit dem Lernmaterial sowie zur Beschreibung der Rechensätze durch die Lehrkraft gegeben werden. Aber in zunehmendem Maße sollen die Kinder selbst sprechen bzw. ihr Vorgehen und ihren Rechenweg darstellen. Den Leitsatz „Hilf mir, es selbst zu tun“ hat Maria Montessori geprägt. Er sollte immer oberste Handlungsprämisse der Lehrenden sein.

Die Leitfiguren Tiger Titus und Lama Linus sind eine Motivationshilfe. Sie können in den Lernprozess einbezogen werden (Abb 5).

Um ein praktikables Arbeiten mit dem Begleitheft zu ermöglichen, sind bei einigen methodischen Hinweisen Wiederholungen unvermeidbar. Damit wird ein gezieltes Informieren zu nur einer Übungsseite möglich.

Als Beilage enthalten die Übungshefte ein Hunderterquadrat bzw. ein Hundertpunktfeld.



Abb. 5