

Die

SARA JACOBEBY

Kombinatorik

Box

Grundschule

Anzahlen ermitteln – Strukturierungs-
strategien entwickeln



Lehrerbegleitheft

Inhaltsverzeichnis

METHODISCH-DIDAKTISCHE HINWEISE	3
AUFGABENBAUSTEINE	7
KOPIERVORLAGEN „SORTIEREN – ORDNEN – FINDEN“	
KV1: Nach Merkmalen ordnen	13
KV2: Ich sehe was, was du nicht siehst	14
KOPIERVORLAGEN „GESICHTER BAUEN“	
KV3: Vollständiges Baumdiagramm 1	15
KV4: Vollständiges Baumdiagramm 2	16
KV5: Baumdiagramm ungefärbt	17
KV6: Baumdiagramm blanko	18
KOPIERVORLAGEN „SCHLOSS KNACKEN“	
KV7: Wortspeicher	19
KV8: 3-stelliger Code	20
KV9: 4-stelliger Code	21
KV10: Baumdiagramme	22
KV11: Knack meinen Code	24
KV12: Spiel: Knack meinen Code	25
KOPIERVORLAGEN „TÜRME BAUEN“	
KV13: Turm aus 3 Würfeln / Turm aus 4 Würfeln	26
KV14: L aus 3 Würfeln / L aus 4 Würfeln	27
KV15: Treppe aus 4 Würfeln	28
KV16: Baumdiagramm: Turm aus 3 Würfeln	29
KV17: Baumdiagramm: L aus 3 Würfeln	30
KV18: Baumdiagramm: Turm aus 4 Würfeln	31
KV19: Entdeckungen an Würfelgebäuden	32
KV20: Türme aus 4 Würfeln, L aus 4 Würfeln und Treppe aus 4 Würfeln	33
KV21: Mein Würfelgebäude	34
KOPIERVORLAGEN „EIS KAUFEN“	
KV22: Wortspeicher	35
KV23: Eisbecher mit 2 Kugeln	36
KV24: Eisbecher mit 3 Kugeln	37
KV25: Eisbecher mit 4 Kugeln	38
KV26: Dein eigener Eisladen	39
KV27: Eisbecher-Paare finden	40
KOPIERVORLAGEN „GELDBEUTEL“	
KV28: 2 Münzen	41
KV29: 3 Münzen	42
KV30: Mein Geldbeutel	43
LÖSUNGEN	44
LITERATUR	45
MATERIALLISTE	46
IMPRESSUM	47

Kombinatorik-Box

LEHRERBEGLEITHEFT

Zur Sache – Fachlicher Hintergrund

Die Kombinatorik ist die Kunst des geschickten Zählens, bei dem die Anzahl komplex strukturierter Mengen, wie Anordnungen, Kombinationen und Auswahlen, bestimmt werden ohne sie einzeln abzuzählen.

Dabei sind die zentralen kombinatorischen Fragestellungen:

- Welche Möglichkeiten gibt es?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es?
- Wie kann man die Möglichkeiten strukturieren und darstellen, um alle Möglichkeiten zu finden?

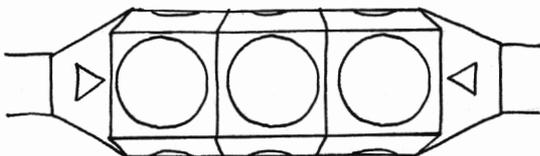
Auch wenn in der Grundschule keine systematische rechnerische Bearbeitung kombinatorischer Fragestellungen vorgesehen ist, erleichtert eine genaue Kenntnis der grundlegenden Prinzipien, Modelle und Darstellungen der Lehrkraft die Unterrichtsplanung.

Zählprinzipien

Beim geschickten Zählen helfen die grundlegenden Zählprinzipien der Kombinatorik, indem die Anzahl der Möglichkeiten rechnerisch ermittelt wird.

An einer Beispielaufgabe sollen sie veranschaulicht werden:

→ Wie viele dreistellige Zahlen kannst du mit den drei Ziffernkarten ① ② ③ legen?



• Additionsprinzip

Hier wird die kombinatorische Fragestellung in Teilprobleme zerlegt, die überschneidungsfrei, also disjunkt sind.

Das Beispiel der Ziffernkarten lässt sich entsprechend in folgende Teilprobleme zerlegen:

- Die Hunderterziffer ist ①.
- Die Hunderterziffer ist ②.
- Die Hunderterziffer ist ③.

Für jedes Teilproblem gibt es 2 Möglichkeiten die übrigen Ziffern anzuordnen.

Es gibt somit insgesamt $2 + 2 + 2 = 6$ Möglichkeiten.

• Multiplikationsprinzip

Wenn bei einer kombinatorischen Fragestellung Entscheidungen in mehreren Stufen nacheinander getroffen werden, lassen sich die gesamten Möglichkeiten multiplikativ bestimmen.

Im Beispiel der Ziffernkarten bedeutet dies, dass es für die Hunderterstelle 3 Möglichkeiten gibt Ziffern auszuwählen, für die Zehnerstelle dann noch 2 Möglichkeiten und für die Einer schließlich noch 1 Möglichkeit.

Insgesamt ergeben sich so $3 \times 2 \times 1 = 6$ Möglichkeiten.

Kombinatorische Grundaufgaben

Die Anzahl von Möglichkeiten hängt davon ab,

- ob die Reihenfolge der angeordneten Elemente berücksichtigt wird oder nicht,
- ob Elemente wiederholt verwendet werden können oder nicht und
- ob mehr Elemente als Plätze vorhanden sind.

Man unterscheidet bei den kombinatorischen Grundaufgaben (auch Grundfiguren, Grundsituationen) zwischen

- *Variationen*, bei denen die Reihenfolge der angeordneten Elemente berücksichtigt wird und
- *Kombinationen*, bei denen die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird.

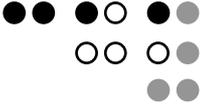
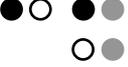
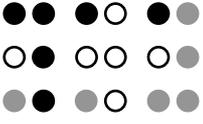
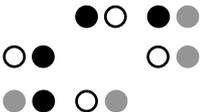
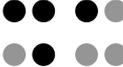
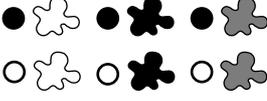
Bei beiden Typen lassen sich Anordnungen

- *mit Wiederholung* der Elemente und
- *ohne Wiederholung* der Elemente unterscheiden.

Darüber hinaus spricht man von *Permutation*, einem Sonderfall der Variation, wenn alle vorhandenen Elemente kombiniert werden, also die Anzahl von Elementen und Plätzen identisch ist. Auch hier können Elemente mehrfach verwendet werden: Im Beispiel der Ziffernkarten stünden dann beliebig viele Karten mit den Ziffern ① ② ③ zur Verfügung. Oder jedes Element steht nur einmal zur Verfügung, wenn genau die drei Ziffernkarten vorhanden sind.

Beim Sonderfall des *Kreuzproduktes* werden Elemente aus unterschiedlichen Mengen kombiniert. Beispiele hierfür sind die Auswahl von Menüs aus einer Speisekarte oder das Zusammenstellen von Kleidungsstücken.

Anhand verschiedener Szenarien im Eisladen kann man die Grundaufgaben folgendermaßen veranschaulichen:

	Beispiel	Möglichkeiten
Kombination mit Wiederholung	2 Eiskugeln aus 3 Sorten auswählen	
Kombination ohne Wiederholung	2 unterschiedliche Eiskugeln aus 3 Sorten auswählen	
Variation mit Wiederholung	2 Eiskugeln in einer bestimmten Reihenfolge aus 3 Sorten auswählen	
Variation ohne Wiederholung	2 unterschiedliche Eiskugeln in einer bestimmten Reihenfolge aus 3 Sorten auswählen	
Permutation mit Wiederholung	2 Eiskugeln in bestimmter Reihenfolge aus 2 Sorten auswählen	
Permutation ohne Wiederholung	2 unterschiedliche Eiskugeln in bestimmter Reihenfolge aus 2 Sorten auswählen	
Kreuzprodukt	Softeis aus 2 Eissorten und 3 Soßen auswählen	

Darstellungen

Um darzustellen, welche Möglichkeiten es zum Beantworten kombinatorischer Fragestellungen gibt, bieten sich unterschiedliche Darstellungen an. Hier werden sie an diesem Beispiel vorgestellt:

→ Welche Möglichkeiten hast du ein Softeis zusammenzustellen? Du kannst zwischen den Eissorten Schokolade und Vanille und den Soßen Schokolade, Karamell und Erdbeere wählen.

Strukturierte Listen sind bereits systematisierte Aufzählungen. Dabei gibt es unterschiedliche Möglichkeiten der Anordnung. Alle Grundaufgaben lassen sich in Listen darstellen.

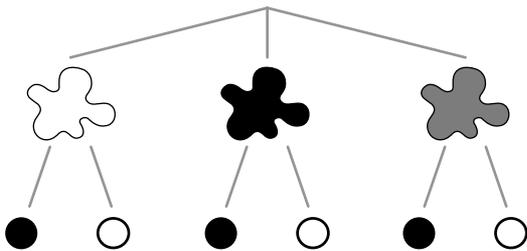
Bsp.: Schoko-Schokosoße Schoko-Karamellsoße
Schoko-Erdbeersoße

Vanille-Schokosoße Vanille-Karamellsoße
Vanille-Erdbeersoße

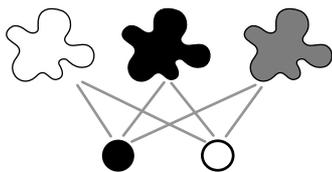
Tabellen können in unterschiedlicher Form zum Darstellen eingesetzt werden: Manche Tabellen liefern gleichzeitig eine Übersicht über die zur Verfügung stehenden Elemente, wie auch die Möglichkeiten selbst. Dies ist besonders dann übersichtlich, wenn zwei Elemente kombiniert werden, wie im Beispiel. Außerdem können Tabellen verwendet werden, indem die ausgewählten Elemente angekreuzt werden.

Baumdiagramme entwickeln Kinder selten von sich aus als Darstellung. Für Variationen, Permutationen und Kreuzprodukte sind sie jedoch hilfreich, um systematisch zu arbeiten und alle Möglichkeiten zu finden. Es bedarf dazu einer Einführung anhand geeigneter Aufgabenstellungen.



Verbindungslinien sind Darstellungen, die von Kindern zur selbstständigen Lösung gewählt werden. Mit wachsender Zahl der Möglichkeiten wird diese Darstellung aber oft unübersichtlich, sie sollte daher zwar aufgegriffen und besprochen, jedoch nicht für alle Kinder eingeführt werden.



Lernvoraussetzungen: Strukturierungsfähigkeit

Um kombinatorische Fragestellungen zielgerichtet bearbeiten zu können, müssen Kinder verschiedene Merkmale von Objekten wahrnehmen und beschreiben können. Die dabei nötige Strukturierungsfähigkeit setzt sich aus verschiedenen Teilaspekten zusammen:

- Wahrnehmen von Merkmalen
- Ausblenden unwichtiger Merkmale
- Bilden von Kategorien mit Ober- und Unterbegriffen
- Berücksichtigen mehrere Merkmale gleichzeitig
- Strukturieren von Situationen (vgl. Ruwisch, 2017)

Aufgaben zum Ordnen und Sortieren sind besonders geeignet, um Voraussetzungen für das erfolgreiche Bearbeiten kombinatorischer Fragestellungen zu schaffen.

Wege und Strategien beim Lösen kombinatorischer Aufgaben

Kombinatorische Fragestellungen zeichnen sich durch eine Vielzahl von möglichen Lösungswegen aus. Dazu gehören:

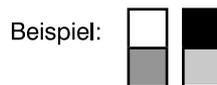
- Systematisches Probieren
- Erstellen strukturierter Listen
- Erstellen von Tabellen
- Erstellen von Baumdiagrammen
- Anwenden der kombinatorischen Zählprinzipien
- Anwenden kombinatorischer Grundaufgaben (vgl. Häring, 2017)

Dabei steht für die Grundschule das probierende Arbeiten mit dem Ziel der zunehmenden Systematisierung im Mittelpunkt. Erfahrungen mit strukturierten Listen, Tabellen und Baumdiagrammen sind dabei hilfreich.

Auf dem Weg zu einer systematischen Vorgehensweise lassen sich bestimmte Stufen beobachten, welche Kinder durchlaufen: Am Anfang stehen die zufällige Auswahl und Zusammenstellung der einzelnen Elemente. Es folgt die erste Verwendung von Mustern beim Zusammenstellen, die erst nur teilweise, später durchgängig erfolgt. Schließlich werden Strategien systematisch angewandt. (vgl. English, 1991)

Dabei lassen sich bestimmte Strukturierungsstrategien beobachten, welche Kinder immer wieder nutzen (vgl. Höveler, 2014):

Disjunkte Paarbildung: Es werden alle Möglichkeiten erzeugt, bei denen kein Element gleich ist.



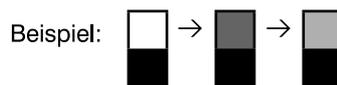
Gegenpaarbildung: Es werden Paare von Möglichkeiten erzeugt, indem die Reihenfolge der Elemente umgekehrt wird oder ein Farbwechsel auf allen Ebenen erfolgt.



Zyklische Musterbildung: Ein Element wird beibehalten und mit einem neuen Element kombiniert. Dieses neue Element wird dann wiederum beibehalten und mit einem neuen Element versehen.



Elementfixierung: Ein Element wird solange beibehalten bis alle Möglichkeiten mit diesem Element gefunden wurden. Dann wird mit den übrigen Elementen ebenso verfahren.



Häufig setzen Schülerinnen und Schüler auch mehrere Strategien kombiniert ein. Außerdem nutzen Kinder ihr Vorwissen aus bereits gelösten Aufgaben, um strukturgleiche Probleme oder solche mit mehr Entscheidungsebenen zu lösen.

Lernfortschritte erkennen

Die Lernentwicklung von Kindern beim Umgang mit kombinatorischen Fragestellungen verläuft unterschiedlich. An folgenden Indikatoren können individuelle Lernfortschritte erkannt werden:

- „Zunahme gefundener Anordnungen
- Weiterentwicklung bisheriger Bearbeitungswege
- Erweiterung des Strategierepertoires
- Transferleistungen
 - Erkennen und Nutzen struktureller Gemeinsamkeiten (...)
 - Eigenes Konstruieren strukturgleicher Aufgaben
- Entwickeln von Beschreibungen/Begründungen
- Ausdifferenzierung von Beschreibungen/Begründungen“ (Bönig, 2010, S. 17)

Die Lernfortschritte weisen dabei starke Streuungen auf: Leistungsschwächere Kinder erhöhen mit zunehmend systematischem Arbeiten oft nur die Anzahl der gefundenen Möglichkeiten, finden aber oftmals nicht alle Möglichkeiten. Leistungsstärkere Kinder dagegen festigen und erweitern ihre Strategien, Fähigkeiten zum mathematischen Kommunizieren und Argumentieren und es gelingen ihnen zudem Transferleistungen.

Zum Einsatz der Kombinatorik-Box im Unterricht

Die Kombinatorik-Box für die Grundschule ist so konzipiert, dass sie im Unterricht vielfältig eingesetzt werden kann. Sie bietet

- Material zur systematischen Bearbeitung kombinatorischer Fragestellungen,
- ergänzendes Material zum Lehrwerk oder zur Differenzierung sowie
- Material für Arbeitspläne, Stationen oder Freiarbeit.

Im Sinne einer substanziellen Lernumgebung können die einzelnen Bausteine im inklusiven Unterricht von Kindern mit unterschiedlichen Lernständen bearbeitet werden. Dazu werden kombinatorische Fragestellungen und Materialien zur Verfügung gestellt, die eine handelnde Auseinandersetzung sowie unterschiedliche Lösungswege und Repräsentationsebenen ermöglichen.

Außerdem sind die kombinatorischen Aufgaben so gewählt, dass sie sich in verschiedene inhaltsbezogene Kompetenzbereiche integrieren lassen. So kann die Kombinatorik-Box bei unterschiedlichen Themen in den Unterricht eingebunden werden.

Differenziertes Lernen ermöglichen

Grundsätzlich weisen die ausgewählten kombinatorischen Fragestellungen eine natürliche Differenzierung auf. So lässt jede Aufgabe das Bearbeiten in allen Anforderungsbereichen zu, vom Finden von einzelnen Möglichkeiten (Anforderungsbereich I), über das systematische Bestimmen aller Möglichkeiten (Anforderungsbereich II) bis hin zum Begründen, warum es keine weiteren Möglichkeiten geben kann (Anforderungsbereich III).

Außerdem ermöglichen die Fragestellungen Offenheit bezüglich der verwendeten Strategien, der gewählten Darstellung und der Repräsentationsebene, auf der die Aufgabe bearbeitet wird: enaktiv - durch das Legen mit Material

oder Nachspielen, ikonisch – beim Anfertigen von Zeichnungen und Skizzen und symbolisch – wenn erste Zählstrategien eingesetzt werden. Zudem stehen Aufgaben zur Verfügung, die den Aufbau von Strukturierungsfähigkeit unterstützen.

Entsprechend diesem Gedanken sind auch die Kopiervorlagen als eine mögliche Hilfe bei der Bearbeitung der Fragestellungen zu verstehen. Alternativ können Lernende auch selbst Darstellungen für ihre Lösungen entwickeln, die sie in Heften oder Mappen festhalten.

Eigenproduktionen anregen

„Am Anfang des Unterrichts steht [...] nicht die Wissensvermittlung des Lehrers, am Anfang des Unterrichts stehen Schülerprodukte, sie haben Priorität“

(Gallin & Ruf 1991, S. 55)

Die Kombinatorik-Box gibt in jedem Baustein Anregungen dafür, Kinder selbst Aufgaben erfinden zu lassen, ihre Lösungswege darzustellen, Zusammenhänge zu beschreiben und zu begründen. Diese Eigenproduktionen sind mündliche oder schriftliche Äußerungen, bei denen die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden können, wie sie vorgehen und ihre Ergebnisse darstellen wollen. Sie regen die Lernenden zum Nachdenken über Gelerntes und über das eigene Vorgehen an und machen sie zum aktiven Mitgestalter des Unterrichts. Lehrkräfte erhalten Informationen über jedes Kind, die diagnostisch, aber auch für die Leistungsbewertung und die weitere Unterrichtsgestaltung genutzt werden können.

Wortspeicher anlegen

Die Qualität von Beschreibungen und Begründungen, die Lernende mündlich und schriftlich verfassen, variiert in der Regel stark. Um den Gebrauch der Fachsprache zu erleichtern, bietet es sich an, mit den Kindern einen Wortspeicher anzulegen.

Ein solcher Wortspeicher kann neben eingeführten Begriffen auch Satzanfänge und -muster für Beschreibungen und Begründungen enthalten. Auf diese Weise entlastet er alle Schülerinnen und Schülern beim Formulieren.

Zwei Beispiele für Wortspeicher sind in den Kopiervorlagen für die Bausteine „Schloss knacken“ und „Eis kaufen“ enthalten.

Mathematische Gesprächsanlässe schaffen

Aufgrund der vielfältigen Möglichkeiten, kombinatorische Fragestellungen zu bearbeiten, ist ein Austausch über Lernwege und Strategien sowie die Reflexion dieser sehr hilfreich, um einen Lernzuwachs zu erreichen. In Gesprächsphasen im Klassenverband oder Kleingruppen können Ergebnisse und Strategien präsentiert und reflektiert werden.