

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	11
Teil A Zahlen	
Vorbemerkungen	13
Kapitel 1 Natürliche Zahlen	14
1.1 Wozu verwendet man die natürlichen Zahlen? Was bedeuten dann die Operationen $+$, $\cdot$, $<$?	14
1.1.1 Ordinale und kardinale Verwendung	14
1.1.2 Eineindeutige Zuordnungen	15
1.1.3 Anzahlbestimmung durch eineindeutiges Zuordnen	16
1.1.4 Endlich und unendlich	18
1.1.5 Zur Bedeutung der Operationen $+$, $\cdot$, $<$	19
Aufgaben 1.1	20
1.2 Anzahlbestimmung mittels Summenregel und Produktregel	21
1.2.1 Summenregel	21
1.2.2 Geordnete Paare, Kreuzprodukt, Produktregel	23
1.2.3 Allgemeine Produktregel	25
Aufgaben 1.2	28
1.3 Die Stellenwertschreibweise für natürliche Zahlen; Beispiele für Algorithmen .	29
1.3.1 Division mit Rest	29
1.3.2 Darstellung natürlicher Zahlen in einem Stellenwertsystem	31
1.3.3 Ausrechnen von Potenzsummen; Horner-Schema	33
1.3.4 Wie spiegeln sich die Operationen $+$, $\cdot$, $<$ in der Stellenwertschreibweise wider?	34
1.3.5 Ergänzung: Der euklidische Algorithmus	36
Aufgaben 1.3	37
1.4 Primzahlen als „Bausteine“ von $\mathbb{N}$	38
1.4.1 Primzahlen	38
1.4.2 Primfaktorzerlegung	39
1.4.3 Die Unendlichkeit der Menge aller Primzahlen	40
1.4.4 Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung	41
1.4.5 Erste Folgerungen aus der Eindeutigkeit der PFZ	42
Aufgaben 1.4	44
Kapitel 2 Bruchzahlen (positive rationale Zahlen) und Größen	44
2.1 Schreibweisen (Bezeichnungen) für Bruchzahlen	45
2.1.1 Bezeichnung durch gewöhnliche Brüche; Addition und Multiplikation	45
2.1.2 Bezeichnung durch Dezimalbrüche	47
2.1.3 Stellt jeder periodische Dezimalbruch eine Bruchzahl dar, und wie findet man deren Bruchdarstellung?	48
Aufgaben 2.1	50
2.2 Verwendung der Bruchzahlen als Maßzahlen; Rechnen mit Größen	50
2.2.1 Größenmäßige Beschreibung von Gegenständen durch Maßzahl und Maßeinheit	50
2.2.2 Was sind Größen; wie vergleicht und addiert man sie?	52
2.2.3 Grundlegende Rechengesetze für Größen	53

2.2.4	Teilbarkeitseigenschaft; Vervielfachung von Größen mit Bruchzahlen	55
2.2.5	Division und Multiplikation von Größen	57
	Aufgaben 2.2	58
2.3	Wichtige Unterschiede zwischen den Zahlbereichen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}^+$	59
2.3.1	Lösbarkeit jeder Gleichung $ax=b$	59
2.3.2	Dichtheit der Bruchzahlen	60
2.3.3	Endlichkeit, Beschränktheit und größte Zahl einer Zahlenmenge	61
	Aufgaben 2.3	62
Kapitel 3 Rationale (insbesondere ganze, auch negative) Zahlen		63
3.1	Wozu verwendet man die rationalen Zahlen? Was bedeuten dann die Rechenoperationen?	63
3.1.1	Verwendungszwecke	63
3.1.2	Bedeutung der Kleinerbeziehung und der Addition	64
3.1.3	Gegenzahlbildung, Subtraktion	65
3.1.4	Bedeutung der Multiplikation	66
	Aufgaben 3.1	68
3.2	Rechenregeln für die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{Q}$	69
3.2.1	Körper-Axiome	69
3.2.2	Erste Definitionen und Beweise	70
3.2.3	Verwendung des Distributivgesetzes und der multiplikativen Inversen	72
	Aufgaben 3.2	74
3.3	Die Kleinerbeziehung in $\mathbb{Q}$; Betrag einer rationalen Zahl	74
3.3.1	Anordnungsaxiome	74
3.3.2	Definitionen und Beweise auf Grund der Anordnungsaxiome	75
3.3.3	Hinweise zur Gleichheitsbeziehung	77
3.3.4	Betrag einer rationalen Zahl	77
	Aufgaben 3.3	79
3.4	Runden von Zahlen; elementare Fehlerrechnung	80
3.4.1	Runden; zuverlässige und gesicherte Ziffern	80
3.4.2	Absoluter und relativer (prozentualer) Fehler	81
3.4.3	Fortpflanzung absoluter Fehler bei den Grundrechenarten	83
3.4.4	Fortpflanzung relativer Fehler bei den Grundrechenarten	85
	Aufgaben 3.4	86
Kapitel 4 Reelle Zahlen		87
4.1	Wozu benötigt man die reellen Zahlen?	87
4.1.1	Inkommensurable Streckenpaare	87
4.1.2	Unzulänglichkeiten der rationalen Zahlen	88
4.1.3	Reelle Zahlen; irrationale Zahlen	90
	Aufgaben 4.1	91
4.2	Reelle Zahlen und Dezimalbrüche; Rechengesetze	91
4.2.1	Entsprechung zwischen reellen Zahlen und Dezimalbrüchen	91
4.2.2	Rechengesetze für reelle Zahlen	94
4.2.3	Intervallschachtelungs-Axiom, Archimedisches Axiom	95
	Aufgaben 4.2	97
4.3	Einiges über Wurzeln	97

4.3.1	Wurzeln und Gleichungslösungen	97
4.3.2	Arithmetisches und geometrisches Mittel	98
4.3.3	Verfahren zur Quadratwurzelberechnung	100
	Aufgaben 4.3	102
Teil B Mengen, Aussagen, Beweise		105
Vorbemerkungen		105
Kapitel 5 Aussageformen und ihre Erfüllungsmengen		105
5.1	Beschreibung von Mengen mittels Aussageformen	105
5.1.1	Aufzählende und beschreibende Schreibweise	105
5.1.2	Äquivalenz von Aussageformen	107
5.1.3	„Gleichungslehre“	108
5.1.4	Mengen von Zahlenpaaren; zweistellige Aussageformen	110
	Aufgaben 5.1	112
5.2	Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit von Aussageformen; Allaussagen und Existenzaussagen	113
5.2.1	Allgemeingültigkeit, Allaussagen	113
5.2.2	Erfüllbarkeit, Existenzaussagen	114
5.2.3	Teilweise (oder: schrittweise) Quantifizierung einer zweistelligen Aussageform	115
5.2.4	Negation von All- und Existenzaussagen	116
	Aufgaben 5.2	117
Kapitel 6 Operationen für Aussagen und Mengen		118
6.1	Die aussagenlogischen Operationen und ihre Entsprechung zu Mengenoperationen	118
6.1.1	Erinnerung an die Aussagenlogik	118
6.1.2	Entsprechungen zwischen logischen und Mengenoperationen	119
6.1.3	Beispiele, insbesondere Gleichungs- und Ungleichungssysteme	119
6.1.4	Wichtige Kombinationen von „nicht“, „und“, „oder“	123
	Aufgaben 6.1	124
6.2	Rechenregeln für die Mengenoperationen und Beweisverfahren dafür	125
6.2.1	$\cap$, $\cup$, $-$ als Operationen in der Potenzmenge	125
6.2.2	Wichtige Rechenregeln für $\cap$, $\cup$, $-$	125
6.2.3	Beweise mittels Zugehörigkeitstabellen	127
6.2.4	Beweise mittels Venn-Diagrammen	128
6.2.5	Beweise durch Folgern aus Grundgesetzen	129
	Aufgaben 6.2	131
6.3	Vereinigung und Durchschnitt von beliebig vielen Mengen; Klasseneinteilungen	132
6.3.1	Vereinigung unendlich vieler Mengen	132
6.3.2	Durchschnitt unendlich vieler Mengen	134
6.3.3	Klasseneinteilungen einer Menge	135
	Aufgaben 6.3	137
Kapitel 7 „Wenn — dann“ und „also“		138
7.1	Implikation und Äquivalenz	138
7.1.1	Der Junktor „ $\Rightarrow$ “ in der Aussagenlogik	138

7.1.2	Beispiele aus der Mathematik	139
7.1.3	Der Junktor „ $\Leftrightarrow$ “	141
7.1.4	Sprachliche Formulierungen für Wenn-dann-Aussagen und Genau-dann-wenn-Aussagen	142
7.1.5	Umkehrung und Kontraposition von Wenn-dann-Aussagen	144
	Aufgaben 7.1	145
7.2	Die Mengen-Inklusion und ihre Eigenschaften	145
7.2.1	Entsprechungen zwischen der Implikation und der Mengeninklusion	145
7.2.2	Wichtige Eigenschaften der Mengen-Inklusion	146
	Aufgaben 7.2	147
7.3	Hinweise zum Gebrauch des Wortes „also“; Schlußschemata	148
7.3.1	Beispiele	148
7.3.2	Die Abtrennungsregel und verwandte Schlußschemata	149
7.4	Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion	151
7.4.1	Einführende Beispiele	151
7.4.2	Allgemeine Beschreibung und Diskussion des Beweisverfahrens	153
7.4.3	Die Sätze von der kleinsten Zahl einer Zahlenmenge und von der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung	155
7.4.4	Die Induktionseigenschaft als Charakteristikum der natürlichen Zahlen	157
	Aufgaben 7.4	158
Teil C Funktionen (Abbildungen) und Relationen		160
Kapitel 8 Der Funktionsbegriff (Abbildungsbegriff): Definitionen und Beispiele ...		160
8.1	Funktionen auf dem Taschenrechner	160
8.1.1	Einstellige Funktionen	160
8.1.2	Plus-, Minus-, Mal und Durch-Operatoren	161
8.1.3	Zweistellige Funktionen	162
	Aufgaben 8.1	164
8.2	Definitionen, Bezeichnungsweisen, Darstellungsweisen	164
8.2.1	Funktion, Definitionsmenge, Zielmenge, Wertemenge	164
8.2.2	Gleichheit von Funktionen; Namen für Funktionen	166
8.2.3	Darstellungsweisen für Funktionen	167
8.2.4	Injektiv, surjektiv, bijektiv	169
8.2.5	Fortsetzen und Einschränken von Funktionen	170
	Aufgaben 8.2	172
8.3	Abbildungen endlicher Mengen; Folgen als Abbildungen	173
8.3.1	Abbildungen mit endlicher Definitions- und Zielmenge	173
8.3.2	Anzahlen solcher Abbildungen; Permutationen	175
8.3.3	Folgen als Abbildungen mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$	176
8.3.4	Rekursive Definition von Folgen	177
	Aufgaben 8.3	178
8.4	Vier Typen geometrisch interpretierbarer Funktionen bzw. Abbildungen	180
8.4.1	Funktionen vom Typ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	180
8.4.2	Funktionen vom Typ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	183
8.4.3	Abbildungen vom Typ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$	186
8.4.4	Abbildungen vom Typ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	189
	Aufgaben 8.4	193

8.5	Maßfunktionen	196
8.5.1	Die Kardinalzahlfunktion	197
8.5.2	Flächeninhalt, Kurvenlänge	198
8.5.3	Bewertungsfunktionen	200
	Aufgaben 8.5	202
Kapitel 9 Operationen für Funktionen		203
9.1	Verkettungen und Umkehren von Funktionen	203
9.1.1	Verkettungen	203
9.1.2	Umkehren	205
9.1.3	Ein Beispiel: Affine Abbildungen der Geraden	207
9.1.4	Abbildungsgruppen	210
	Aufgaben 9.1	210
9.2	Elementargeometrische Abbildungen und ihre Verkettung	211
9.2.1	Affine Abbildungen der Ebene	211
9.2.2	Geradenspiegelungen, Verschiebungen, Drehungen	213
9.2.3	Kongruenzabbildungen als Spiegelungsketten und als Isometrien	216
	Aufgaben 9.2	219
9.3	Spezielle Operationen für reelle Funktionen	220
9.3.1	Addition und Multiplikation	220
9.3.2	Entsprechung zu den Mengenoperationen (Charakteristische Funktionen)	222
9.3.3	Verkettung von reellen Funktionen mit affinen	224
9.3.4	Symmetrieeigenschaften von Funktionsgraphen	226
9.3.5	Die Funktionalgleichungen der linearen und der Exponentialfunktionen	228
	Aufgaben 9.3	231
Kapitel 10 Relationen		233
10.1	Der Relationsbegriff in Beziehung zu anderen Begriffen	233
10.1.1	Was ist eine Relation?	233
10.1.2	Beispiele und Darstellungsweisen für Relationen	235
10.1.3	Operationen mit Relationen	237
10.1.4	Funktionen als spezielle Relationen	239
	Aufgaben 10.1	241
10.2	Eigenschaften von Relationen; Ordnungsrelationen	241
10.2.1	Transitivität	241
10.2.2	Reflexivität und Irreflexivität	242
10.2.3	Symmetrie und Antisymmetrie, Trichotomie	243
10.2.4	Ordnungsrelationen	244
	Aufgaben 10.2	246
10.3	Äquivalenzrelationen	247
10.3.1	Äquivalenzrelationen und Gleichheit	247
10.3.2	Äquivalenzrelationen und Abbildungsgruppen	248
10.3.3	Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen	251
10.3.4	Eine Anwendung: Grundaufgaben der Kombinatorik	253
10.3.5	Begriffsbildung durch Abstraktion bzgl. einer Äquivalenzrelation	256
	Aufgaben 10.3	257

Kapitel 11 Begründung von Zahlbegriffen	258
11.1 Reelle Zahlen, rationale Zahlen	259
11.1.1 Zahlen als Größenverhältnisse	259
11.1.2 Rekonstruktion der Bruchzahlen als Operatoren für Größen	261
11.1.3 Rekonstruktion der Bruchzahlen als Verhältnisse von natürlichen Zahlen	264
11.1.4 Negative Zahlen	267
Aufgaben 11.1	269
11.2 Gleichmächtigkeit von Mengen; Kardinalzahlen	270
11.2.1 Die Gleichmächtigkeit als Äquivalenzrelation zwischen Mengen	270
11.2.2 Nochmals: endliche und unendliche Mengen	271
11.2.3 Abzählbar unendliche Mengen	271
11.2.4 Kontinuum-unendliche Mengen	274
11.2.5 Kardinalzahlen	277
11.2.6 Gibt es noch größere Kardinalzahlen?	279
Aufgaben 11.2	280
 Lösungen der Aufgaben	 282
zu Kapitel 1	282
zu Kapitel 2	285
zu Kapitel 3	288
zu Kapitel 4	292
zu Kapitel 5	295
zu Kapitel 6	297
zu Kapitel 7	302
zu Kapitel 8	305
zu Kapitel 9	314
zu Kapitel 10	320
zu Kapitel 11	324
 Stichwortverzeichnis	 328