

1 Orientierung im Tausenderraum	13
1.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	13
1.1.1 Die tragende Rolle des Tausenderraums im Aufbau des Zehnersystems	13
1.1.2 Grundlegende Arbeits- und Demonstrationsmittel	14
1.2 Aufbauende Sequenz von Lernumgebungen	18
1.2.1 Grundlegende Zahldarstellungen	18
1.2.2 Das Tausenderbuch	20
1.2.3 Darstellungen von Zahlen an der Stellen- und Klappstellentafel	25
1.2.4 Tausenderreihe und Rechenstrich	29
1.2.5 Tausenderstruktur bei Größen	32
1.2.6 Koordinierungsübungen	35
1.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	36
1.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	36
2 Halbschriftliche Addition und Subtraktion im Tausenderraum	38
2.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	38
2.1.1 Rechenwege der Addition und Subtraktion	38
2.1.2 Die Strategie „Hunderter minus Hunderter, Zehner minus Zehner, Einer minus Einer“	42
2.2 Aufbauende Sequenz von Lernumgebungen	43
2.2.1 Rechenwege der Addition erarbeiten und üben	43
2.2.2 Rechenwege der Subtraktion erarbeiten und üben	46
2.2.3 Minusaufgaben durch Ergänzen lösen	48
2.2.4 „Immer vier Aufgaben“	50
2.2.5 Malreihen von Zahlen berechnen	51
2.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	54
2.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	55
3 Produktive Übungen zur halbschriftlichen Addition und Subtraktion	57
3.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	57
3.1.1 Operatives Üben	57
3.1.2 Gewinnung von Beweisen durch die Analyse von Rechnungen ..	58
3.2 Lernumgebungen zur Auswahl	58
3.2.1 Schöne Päckchen aus dem Tausenderbuch	58
3.2.2 Rechnen mit Plusfolgen	60
3.2.3 Differenzen von Umkehrzahlen	62
3.2.4 „Zwei Zahlen, drei Aufgaben“	65
3.2.5 Streichquadrate	67
3.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	71
3.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	72

4 Blitzrechnen im Tausenderraum	73
4.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	73
4.1.1 Blitzrechnen als konzertierte Aktion aller Beteiligten	73
4.1.2 Materialien zum Blitzrechnen im Tausenderraum	74
4.2 Die zehn Blitzrechenübungen im Tausenderraum	74
4.2.1 „Einmaleins, auch umgekehrt“	74
4.2.2 „Verdoppeln und Halbieren im Hunderter“	75
4.2.3 „Wie viele?/Welche Zahl?“	75
4.2.4 „Zählen in Schritten“	75
4.2.5 „Ergänzen bis 1000“	75
4.2.6 „1000 teilen“	75
4.2.7 „Verdoppeln und Halbieren im Tausender“	75
4.2.8 „Einfache Plus- und Minusaufgaben“	76
4.2.9 „Mal 10/durch 10“	76
4.2.10 „Zehner-Einmaleins, auch umgekehrt“	76
4.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	76
4.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	77
5 Einführung der schriftlichen Addition und grundlegende Übungen	78
5.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	78
5.1.1 Mathematische Begründung der schriftlichen Addition	78
5.1.2 Das Prinzip der fortschreitenden Schematisierung	80
5.2 Aufbauende Sequenz von Lernumgebungen	80
5.2.1 Einführung der schriftlichen Addition	80
5.2.2 Entfernungen auf der Autobahn	83
5.2.3 Übungen mit Ziffernkärtchen	84
5.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	85
5.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	86
6 Einführung der schriftlichen Subtraktion und grundlegende Übungen	87
6.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	87
6.1.1 Fünf verschiedene Verfahren der schriftlichen Subtraktion	87
6.1.2 Bewertung der Verfahren	90
6.1.3 Didaktische Folgerungen	94
6.2 Aufbauende Sequenz von Lernumgebungen	96
6.2.1 Einführung des Ergänzungsverfahrens	97
6.2.2 Einführung des Abziehverfahrens	99
6.2.3 Übungen der schriftlichen Subtraktion mit Malreihen	100
6.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	101
6.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	102

7 Produktive Übungen zur schriftlichen Addition und Subtraktion	103
7.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	103
7.1.1 Rechenkontrolle durch mathematische Muster und Musterverifikation	103
7.1.2 Operativer Beweis der Neunerregel der Addition	104
7.2 Lernumgebungen zur Auswahl	106
7.2.1 Freie Übungen mit Ziffernkärtchen	106
7.2.2 Übungen mit sechs Ziffernkärtchen	107
7.2.3 Übungen mit neun Ziffernkärtchen	110
7.2.4 Subtraktion mit UHU-Zahlen	112
7.2.5 Zahlenmauern	115
7.2.6 Rechendreiecke	117
7.2.7 Wachstum eines Panzernashorns	119
7.2.8 Höhenunterschiede im Gebirge	120
7.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	121
7.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	122
8 Grundlegende und produktive Übungen zur halbschriftlichen Multiplikation	125
8.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	125
8.1.1 Vom Punktfeld zum Malkreuz	125
8.1.2 Nutzung größerer Punktfelder	127
8.2 Aufbauende Sequenz von Lernumgebungen	127
8.2.1 Einführung des Malkreuzes	128
8.2.2 Das große Einmaleins	129
8.2.3 Malaufgaben am Vierhunderterfeld	131
8.2.4 „Von oben nach unten und über Kreuz“	133
8.2.5 Flächeninhalt kleiner Plätze	135
8.2.6 Rechnen mit Geld	136
8.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	137
8.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	137
9 Das Zehnermaleins und seine Umkehrung	139
9.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	139
9.1.1 Begründung des Verbindungsgesetzes der Multiplikation	139
9.1.2 Begründung des Zehnermaleins	140
9.1.3 Die Zehnermaleins-Tafel	142
9.1.4 Die Umkehrung des Zehnermaleins	143
9.2 Aufbauende Sequenz von Lernumgebungen	144
9.2.1 Einführung des Zehnermaleins über Malreihen	144
9.2.2 Einführung des Zehnermaleins mithilfe des Verbindungsgesetzes der Multiplikation	146
9.2.3 Malaufgaben und Teilungsaufgaben	148
9.2.4 Teilen mit Zehnern wie mit Einern	149

9.2.5 Rechenkettens	150
9.2.6 Malreihen zweistelliger Zahlen	152
9.2.7 Verschiedene Malaufgaben – gleiche Ergebnisse	153
9.2.8 Rechnen mit Geld	155
9.2.9 Die Konstruktion von Drahtseilen	156
9.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	157
9.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	157

Kapitel II Millionraum

1 Orientierung im Millionraum	160
1.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	160
1.1.1 Die Million als 1000 Tausender	160
1.1.2 Grundlegende Darstellungsmittel im Millionraum	161
1.2 Aufbauende Sequenz von Lernumgebungen	164
1.2.1 Von der Stellentafel und dem Tausenderbuch zur Million	164
1.2.2 Einführung des Millionbuchs	166
1.2.3 Darstellung von Zahlen an der Stellentafel und der Klappstellentafel	171
1.2.4 Millionreihe und Rechenstrich	176
1.2.5 Einfache Plus- und Minusaufgaben	178
1.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	180
1.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	180
2 Produktive Übungen zur Addition und Subtraktion	181
2.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	181
2.1.1 Die Bedeutung produktiver Übungen für die mathematische Bildung	181
2.1.2 Praktische Vorteile produktiver Übungen	181
2.2 Lernumgebungen zur Auswahl	182
2.2.1 Additionsaufgaben mit zehn Ziffernkärtchen	182
2.2.2 Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Malreihen	184
2.2.3 Subtraktion von ANNA-Zahlen	187
2.2.4 Alle Rechnungen führen zu 6174	190
2.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	195
2.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	195
3 Halbschriftliche Multiplikation und Division im Millionraum	196
3.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	196
3.1.1 Anwendung der Rechengesetze auf die Multiplikation	196
3.1.2 Anwendung der Rechengesetze auf die Division	197
3.1.3 Operative Veränderungen von Mal- und Divisionsaufgaben	199
3.1.4 Formale Interpretation des Verbindungsgesetzes	200
3.2 Aufbauende Sequenz von Lernumgebungen	201

3.2.1 Einfache Malaufgaben	201
3.2.2 Von einfachen zu schwierigen Malaufgaben	204
3.2.3 Schöne Päckchen?	207
3.2.4 „Immer vier Aufgaben“	208
3.2.5 Einfache Divisionsaufgaben	210
3.2.6 Von einfachen zu schwierigen Divisionsaufgaben	211
3.2.7 Rechenkettten	213
3.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	214
3.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	215
4 Blitzrechnen im Millionraum	217
4.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	217
4.1.1 Übersicht über den Blitzrechnenkurs	217
4.1.2 Materialien zum Blitzrechnen im Millionraum	218
4.2 Die zehn Blitzrechnenübungen des Millionraums	218
4.2.1 „Zahlen zeigen, lesen und schreiben“	218
4.2.2 „Ergänzen bis zur Million“	218
4.2.3 „Stufenzahlen teilen“	218
4.2.4 „Subtraktion von Stufenzahlen“	218
4.2.5 „Zahlen unterschiedlich lesen“	218
4.2.6 „Zählen in Schritten“	219
4.2.7 „Verdoppeln und Halbieren“	219
4.2.8 „Einfache Plus- und Minusaufgaben“	219
4.2.9 „Stelleneinmaleins“	219
4.2.10 „Einfache Mal- und Teilungsaufgaben“	219
4.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	219
4.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	220
5 Einführung der schriftlichen Multiplikation, grundlegende und produktive Übungen	221
5.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	221
5.1.1 Fortschreitende Schematisierung im Bereich der Multiplikation ..	221
5.1.2 Das Zehnersystem als fundamentale Lernhilfe	225
5.2 Aufbauende Sequenz von Lernumgebungen	226
5.2.1 Vom Malkreuz zu den Malstreifen	226
5.2.2 Von den Malstreifen zur schriftlichen Multiplikation	229
5.2.3 Schöne Päckchen, Schöne Päckchen?	231
5.2.4 Verschiedene Malaufgaben – gleiche Ergebnisse	232
5.2.5 Flächeninhalt großer Plätze	234
5.2.6 Wie groß in Wirklichkeit?	235
5.2.7 Kredite kosten Geld	236
5.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	237
5.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	237

6 Einführung der schriftlichen Division, grundlegende und produktive Übungen	238
6.1 Mathematische und didaktische Grundlagen	238
6.1.1 Der mathematische Kern der schriftlichen Division	238
6.1.2 Die Bedeutung der schriftlichen Verfahren für die mathematische Bildung	240
6.2 Aufbauende Sequenz von Lernumgebungen	241
6.2.1 Von der halbschriftlichen zur schriftlichen Division	241
6.2.2 Schöne Päckchen, Schöne Päckchen?	244
6.2.3 Verschiedene Teilaufgaben – gleiche Ergebnisse	245
6.2.4 Dividieren durch große Zahlen	246
6.2.5 „Voll beladen“	247
6.2.6 Preise für Fußballspiele	248
6.3 Anregungen zu kollektiven Unterrichtsexperimenten	249
6.4 „Forschen und Finden“ für die Leserinnen und Leser	249

Kapitel III Gesamtschau

1 Übersicht über den Aufbau des Rechenunterrichts in der Grundschule	252
2 Bildungspolitische Anmerkungen	256

Anhang

Hinweise zum Downloadmaterial	258
-------------------------------	-----

Bildquellenverzeichnis Coverbild: Henrik Kranenberg, S. 14 Abb. 3 © Klett-Archiv (Martin Adam, Berlin), Stuttgart; S. 15 Abb. 4–6, S. 16 Abb. 9, S. 67 Foto Ed de Moor, S. 80 Foto Adri Treffers, S. 103 Foto Wilhelm Oehl, S. 163 Abb. 4–5 © Erich Ch. Wittmann; S. 17 Abb. 12, S. 55/56 Abb. 15–18, S. 81 Abb. 7, S. 37 Abb. 20, S. 97 Abb. 14, S. 143 Abb. 6, S. 162 Abb. 1, S. 163 Abb. 7 © Klett-Archiv, Stuttgart; S. 44/47 Juliane Assies, Berlin; S. 80 F. A. W. Diesterweg 1790 – 1866. Diesterweg-Ehrung 1990. Sonderausstellung des Schulmuseums Berlin © Stadtarchiv Siegen; S. 94 Foto Denkmal Al Khwarizmi © Karl Ganter, Berlin, 1997; S. 94 Foto Denkmal Fibonacci © Wolfgang Volk, Berlin, 2011; S. 104 Foto Denkmal für Adam Ries © Kur & Tourismus Service Bad Staffelstein; S. 162 Abb. 2 © Klett Archiv (Sabine Döring, Rodgau), S. 168 Klett-Archiv (David Ausserhofer, Wandlitz), Stuttgart; S. 223 Bild John Napier © UllsteinBild GmbH (The Granger Collection)