

„Es ist doch so:
 2×2 macht irgendwas und 4×4 macht irgendwas.
 Leider nicht dasselbe.
 Sonst wäre es einfacher!“
 (Stan Laurel)

Vorwort

So wie Stan geht es vielen Kindern. Für sie sind die Zahlen ein Rätsel. Sie betrachten die Beschäftigung mit ihnen als Rätselspiel, das sich die Schule oder irgendwelche Erwachsenen ausgedacht haben. Es kommt darauf an, hinter die Regeln zu kommen, die aber ziemlich kompliziert gemacht wurden. Das ist schade, denn sonst wäre es einfacher.

Die Schule tut wenig dafür, dieses Bild der Mathematik und des Rechnens aufzulösen. Rechenunterricht findet noch immer zumeist abgesondert statt. Wo immer Lehrer und Lehrerinnen Fächer vernetzen, nur selten wird hierbei der Rechenunterricht einbezogen. Leichter scheint es, Kunstunterricht mit Sachkunde oder Deutsch mit Musik zu verbinden als das Rechnen mit der Erfahrungswelt der Kinder. Seitens der Mathematik tauchen Umwelt und Erfahrungswelt vor allem als Beispiel oder Anwendung auf, selten – und häufig nie – als deren Auslöser.

In der Reformpädagogik blieb die Mathematik ungewöhnlich isoliert und auf sich bezogen. An den von Montessori entwickelten Materialien und ihrer Bearbeitung sieht man deutlich, wie Mathematik als eigenständiger, isolierter Bereich des Denkens gesehen und entwickelt wird. Indem das Kind sich mit den Spindeln und dem Rosa Turm, mit dem Multiplikationsbrett oder den Perlenketten beschäftigt, nimmt es deren Strukturierung auf. Es lernt so mathematische Strukturen wie größer/kleiner, Vorgänge wie Vervielfachen und Teilen, oder Mengen als unterschiedlich geordnete Ansammlungen von Einzelelementen, kennen. Diese Erfahrung bleibt aber im Lernprozess ans Material gekoppelt und ist nicht auf den Alltag gerichtet.

In der Arbeit am Material strukturiert das Kind seinen Geist im mathematischen Sinne. Die Vorstellung ist, dass das Kind diese Strukturierung aufnimmt und so bei seiner Wahrnehmung des Alltags benutzen kann. Diese Übertragungsleistung mag vom Kind im Einzelfall geleistet werden oder auch nicht. In der gemeinsamen pädagogischen Arbeit, im Rechenkonzept der Montessoripädagogik, wird sie nicht thematisiert.

Neuere fachdidaktische Veröffentlichungen betonen ausdrücklich die Notwendigkeit, Mathematikunterricht vor allem auch an der Mathematik zu treiben, das heißt, deren Grundlagen selbst zum Kern des Unterrichts zu machen. „Ohne die Erforschung mathematischer Strukturen *für sich selbst*, jenseits unmittelbarer Wirklichkeitsbezüge, hätte sich die Mathematik niemals zu dem breiten anwendungsfähigen Werkzeug entwickeln können, das es heute ist. ... Der ‚reine Aspekt‘ der Mathematik ist insofern ein unverzichtbares Element des Mathematiklernens.“¹

So richtig das ist, und so wichtig es daher ist, die Einsicht in die Eigenständigkeit der Zahlenwelt und deren Gesetzmäßigkeiten als wertvolles Ziel im Auge zu behalten, so problematisch ist es, wenn dieser Gesichtspunkt am Anfang dominiert, wenn entdeckendes Ler-

nen im Unterrichtsalltag nur noch an Rechendreiecken, Zahlenmauern, Zahlenfolgen, merkwürdigen Zahlen und Ähnlichem praktiziert wird und die Umwelt ausschließlich oder überwiegend in zum Thema passenden Sachaufgaben verpackt daher kommt.

Wichtig an der zitierten Aussage bleibt, dass die Mathematik auch auf der Ebene des Rechnenlernens vor allem dann ihre bildende Kraft entfalten kann, wenn die verwendeten Verfahren reflektiert werden, wenn die Überlegungen zur Sprache kommen und das Rechnen nicht nur Mittel, sondern auch Inhalt ist. Richtig ist aber auch, dass die Reflexion des Rechnens das Rechnen voraussetzt. Und es will mir nicht einleuchten, warum es ‚reinerer‘ Mathematik sein soll, wenn diese Reflexion an Kunstobjekten wie Zahlenmauern geschieht, als wenn sie sich an der Frage reibt, warum Bohnenpflanzen immer 2, 5, 8, 11, ... Blätter haben. Ich kann auch nicht nachvollziehen, warum es bildender sein soll, seine Überlegungen beim Rechnen in Zahlennotizen festzuhalten, als diese durch Operationen mit konkretem Rechenmaterial zu vollziehen.

Die geschriebene Zahl kann den Rechenprozess erst dann unterstützen, wenn sie dem, der da rechnet, mehr ist als ein Zeichen. Gerade weil das *Ziel* des Rechnenlernens das Rechnen mit unseren abstrakten Zahlen ist, ist das zentrale *Lernziel* der Arithmetik ein wirklich fundiertes Zahlverständnis. Und das entwickelt sich erst allmählich vom Konkreten zum Abstrakten, weshalb angemessene konkrete Rechenverfahren gefunden und angeboten werden müssen.

Diesem Ziel einer Passung zwischen praktizierten Rechenverfahren und innerer Rechenlogik wird allein mit den vertrauten Methoden noch nicht genügend Rechnung getragen. Nach *Schipper/Raddatz* lösen am Ende der vierten Klasse die schwachen Rechner zwei Drittel und selbst die guten Rechner ein Fünftel der Aufgaben im Zahlenraum bis 20(!) noch zählend.² Offensichtlich haben alle Übungen mit Zahlen und das Rechnen in den systematisch aufgebauten Zahlräumen – trotz der Veranschaulichung mit Material – bei vielen Kindern nicht geholfen, um zu einem Rechnen vorzudringen, das die dezimale Stellenwertstruktur unserer Zahlen und Aspekte wie Zerlegung oder Verdopplung nutzt. Wenn dies aber so ist, dann ist es doppelt wichtig, *dieser* unangenehmen Wahrheit ins Gesicht zu schauen, und eine Form des Rechnenlernens zu entwickeln, die der inneren Logik des Abzählens Rechnung trägt und breiteren Raum einräumt. *Daran anknüpfend und darauf aufbauend* müssen die mathematischen Konzepte thematisiert und müssen die weiterführenden Rechenverfahren entwickelt werden! Gefordert ist eine Brücke zwischen handelndem und abstraktem Rechnen, die bis in die hohen Zahlenräume hinein trägt.

Ich plädiere daher dafür, den Kindern Wege zu zeigen, auf denen sie so konkret rechnen können, wie es ihrer inneren Anschauung entspricht und die Zahlen, bzw. Zahlzeichen dabei zunächst eher als Notationshilfen zu begreifen. Auch dort, wo schon mit Zahlen gerechnet wird, sind diese immer wieder auf konkrete Realitäten zurück zu beziehen. Denn das zugrundeliegende Denken der Kinder ist selbst dann, wenn die Beschleunigung des pädagogischen Alltags schon Zahlenrechnen zeigt, im Wesentlichen noch immer ein konkretes Denken.

Insbesondere rechenschwache Schüler werden vom frühzeitigen Übergang auf abstrakte Zahlzeichen überfordert und müssen sich dann als Notlösung auf die Suche nach den versteckten ‚Tricks‘ machen. Für sie ist nicht nur der Zusammenhang zwischen dem Rechnen und ihrer Lebenserfahrung verloren gegangen, sondern auch der zwischen Zahl und deren Gehalt. Sie sitzen als ‚Stan‘ in der Klasse und empfinden sich als zu ‚doof‘ zum Rechnen. Sie brauchen Mittel, die ihnen helfen, die konkrete Situation oder die abstrakte Zahl handelnd zu übersetzen: *Rechenmittel*.

Ich plädiere zweitens dafür, die Erfahrungswelt als Rechenanlass ebenso zu nutzen wie für mathematische Entdeckungen. Weil die Umwelt *nicht* didaktisch aufbereitet daher kommt, zwingt sie uns, unser Rechenvermögen kreativ zu nutzen und angesichts der noch nicht befriedigend lösbaren Probleme weiter zu entwickeln. Sie hilft uns, nicht in Zahlräumen zu denken, sondern in Problemstellungen. Rechnen an der Umwelt heißt daher immer, in einem persönlichen Zugriff denkend zu arbeiten. Diese Chance, unseren Unterricht von den Routinen zu befreien und zu einem geistvollen Arbeitsprozess umzugestalten, dürfen wir uns nicht entgehen lassen.

Dieses Anknüpfen an die Umwelt wird aber nur möglich, wenn wir die konkrete Wirklichkeit auf einem angemessenen Abstraktionsniveau handhabbar machen können. Dieser Aufgabe dienen im Bereich der Anzahlen die Rechenmittel, die den abstrakten Zahlen eine konkrete Gestalt geben. Deren Einsatz und Gebrauch, insbesondere die aufbauende Entwicklung der Rechenmittel über die vier Schuljahre, stellt daher das eigentliche Kernelement und das eigentlich Neue dieser Veröffentlichung dar. Eine Konsequenz, die mit der Verschiebung des Focus auf die Rechenverfahren und auf die konkrete Zahldarstellung in Form handhabbarer Mengen einher geht, ist zum Beispiel die, dass sich die Stufung des Lehrgangs nun nicht mehr in Zahlräumen (bis 5, bis 10, bis 20, bis 100, bis 1000, bis 1 Million) vollzieht, sondern dass Stufen innerer Rechenkonzepte sichtbar gemacht, die mit bestimmten Zahlvorstellungen korrespondieren. Diese inneren Konzepte sind weitgehend unabhängig von den behandelten Zahlräumen, weshalb der Unterricht nicht mehr in der Logik wachsender Zahlräume, sondern in der Logik zunehmend abstrakter Rechenmittel entwickelt wird.

Rechenmittel ermöglichen nicht nur einen an Umweltbezügen interessierten Mathematikunterricht. Sie wirken auch integrativ! Denn sie ermöglichen es, Kinder, die inhaltlich abgehängt scheinen, im ‚ganz normalen Rechenunterricht‘ in einer Form einzubinden und zu fördern, dass diese wieder Anschluss ans Geschehen gewinnen. Dies ist möglich, weil das handelnde Rechnen mit Rechenmitteln hilft, Strukturen zu bilden, die von vielen Kindern nicht allein logisch an der Analyse von Zahlen und mathematischen Konstrukten erschlossen werden können.

Dieser Focus ist eng gezogen. Er schließt vieles aus, was auch zum Rechnenlernen gehört. Weder werden die einzelnen Größen in ihrer jeweiligen Bedeutung thematisiert, noch kommen operative Übungen vor. Aus den unterschiedlichen Aspekten der Zahl sind hier nur Zählzahl und Anzahl ernsthaft angesprochen. Das Kopfrechnen wird ebenso wenig erwähnt wie dem halbschriftlichen Rechnen breiter Raum eingeräumt wird, das *Schipper/Raddatz* zu Recht als ‚gestütztes Kopfrechnen‘ bezeichnen.

Dies geschieht nicht, weil diese Bereiche keine Bedeutung hätten. Im Gegenteil! Gerade am Kopfrechnen und gestützten Kopfrechnen zeigt sich, wie ein Kind innerlich denkt und rechnet. Auf welchem Zahlverständnis es aufbaut. Nicht um die Bedeutung dieser Bereiche zu relativieren, werden sie ausgeblendet oder nur am Rande behandelt, sondern um die Neuerung ganz in den Mittelpunkt zu stellen, um die es mir geht und die nicht durch den Versuch eines umfassenden Konzepts verwässert werden soll.

Diese Neuerung besteht darin, anzuerkennen, dass Rechnen zunächst einmal *kein Rechnen mit Zahlen, sondern ein Rechnen mit Anzahlen* (also etwas Gezähltem) ist, – selbst dort, wo es in Zahlen notiert wird. Sie besteht zweitens darin, dem konkreten Rechnen Mittel an die Hand zu geben, die Rechenhandlungen auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau möglich machen. Sie besteht drittens darin, den diagnostischen und didaktischen Blick weg von den Zahlräumen hin zu den Zahlstrukturen zu wenden, so dass die Entwicklung eines Schülers auf dieser Ebene beschreibbar wird. Dabei wird betont, dass die Einsicht in die grundlegenden Eigenschaften unserer Zahlen, nämlich aus dezimalen Bündelungen und Stellenwerten gebildet zu sein, im Zentrum der Aufmerksamkeit stehen muss. Und schließlich besteht die hier vorgeschlagene Neuerung darin, diese Vorgänge in einen Lernprozess einzubinden, der das Rechnen selbst und die Entwicklung der uns vertrauten Verfahren *zum Mittel* erhebt, das Ziel eines verständigen Umgangs mit Zahlen zu erreichen. Es geht daher um einen Einstieg ins Umdenken im Bereich des Rechnenlernens.

Der hier vorgestellte Ansatz ist im Klassenunterricht entstanden und wurde im Klassenunterricht entwickelt. Er setzt nicht die ‚Eins-zu-eins‘-Fördersituation voraus und auch nicht die kleine Gruppe. Es geht um einen *fördernden Klassenunterricht* und um *im Klassenunterricht fördernde Verfahren*.

Dieses Buch richtet sich daher in erster Linie an Lehrerinnen und Lehrer der Grundschule oder Sonderschule, die sich bemühen, ihren Rechenunterricht effektiver zu gestalten. Um dazu in der Lage zu sein, gilt es, den Blick zu schärfen für das, was im Kind unter der Oberfläche des sichtbaren Rechnens geschieht. ‚*Wie lernen Kinder rechnen? Was passiert da eigentlich in ihrem Kopf?*‘ Davon gilt es ein Bild zu haben, wenn wir ein Kind in seinem Lernprozess begleiten wollen. Für diese Frage bietet dieses Buch ein Modell. Indem es hilft, durch ein tieferes Verständnis der Vorgänge zu einer sensibleren Sicht zu gelangen, stärkt es die Diagnose- und Entscheidungskompetenz im ganz normalen Rechenunterricht.

Was wir als Lehrer aber auch suchen, sind Handlungsalternativen. Handlungskompetenz erwächst nicht automatisch aus der Diagnose. Oft stehen wir im Unterricht ratlos vor den erkannten Problemen. Da nutzt uns auch die beste Diagnose nichts, wenn wir nicht wissen, wie wir darauf reagieren können. Daher bildet diese praktische Frage des alltäglichen Unterrichts den Ausgangspunkt des Buches. Dabei geht es vom alltäglich erlebten ‚Erfolg und Misserfolg im Unterricht‘ *als Realität* unserer Unterrichtsarbeit aus, das heißt von der geläufigen Tatsache, dass es ‚gute und schwache Rechner gibt‘.

Dies geschieht aber nun nicht in der Form, dass es versucht, die guten Rechner als Erfolg und die schwachen Rechner als Misserfolg des Unterrichts zu verbuchen. Es geht nicht

darum, die Illusion zu nähren, wir könnten bei Verwendung der richtigen Konzepte, alle zu guten Rechnern machen. Im Gegenteil wird die Tatsache der Differenz zum Ausgangspunkt und Anlass genommen, das Unterschiedliche in seiner Unterschiedlichkeit Ernst zu nehmen, um jedem zu seinem Recht zu verhelfen. Dies geschieht ganz praktisch, indem insbesondere Möglichkeiten dargestellt werden, worin eine akzeptierende Förderung bestehen kann, welche den ‚schwachen Rechner‘ nicht als mangelhaft, sondern als anders denkend anerkennt.

Bei der Suche nach angemessenen, nicht diskriminierenden Formen der unterstützenden Begleitung gerät die Materialebene in den Blick, welche in ihrer Bedeutung für das Denken des Kindes und insbesondere in ihrer fördernden Wirkung dargestellt wird. Dass der Gebrauch des Materials so breiten, fast handbuchartigen Raum einnimmt, dient dabei einem doppelten Zweck. Zunächst und vor allem soll die Effizienz vor Augen geführt werden, welche dem hier vorgeschlagenen Material innewohnt, wenn man dessen Kernbotschaften verstanden hat. Gleichzeitig sollen eben diese Kernbotschaften durch die detaillierte Präsentation nachvollziehbar und also im eigenen Unterricht verwendbar werden.

Indem das Rechnen als ein Vorgang dargestellt wird, in dem unterschiedliche Denkniveaus als natürliche Realität und insbesondere das konkrete und handelnde Rechnen als wesentliche Basiskompetenz anerkannt werden und indem mit den Rechenmitteln ein Material an die Hand gegeben wird, das diese Vielfalt des Geschehens und die Veränderungen des Denkens bei den einzelnen Kindern produktiv begleitet, ist zugleich die Grundlage dafür gelegt, dass das Buch auch unter der dritten Fragestellung ‚*Wie können wir die Rechenkompetenz fördern?*‘ gelesen werden kann.

Wir haben durch die in den Rechenmitteln sichtbare Stufung nämlich sowohl ein *Diagnose* als auch ein *Fördermittel*. Und da nahezu mit jedem Material und daher auf jedem Niveau alle Rechenprobleme des Grundschulbereichs lösbar sind, können wir die Förderung inhaltlich an das Unterrichtsgeschehen anbinden, in dem sich das Kind mit seiner Klasse bewegt. Wir müssen ihm keine anderen Aufgaben geben. Wir geben ihm nur andere Rechenmittel in die Hand; Rechenmittel, die seinem Denken entsprechen, dieses anerkennen und daher nicht nur seine kognitive Entwicklung, sondern auch sein Selbstbewusstsein fördern. Durch diese Eigenschaft lässt sich der Ansatz auch aus sonderpädagogischer Perspektive lesen und produktiv nutzen.

Wenn also das Buch sowohl im Blick auf den Rechenunterricht als Gesamtkonzept wie im Blick auf den Förderaspekt oder den Diagnoseaspekt gelesen werden kann, so spiegelt sich diese Vielfalt auch in den unterschiedlichen Möglichkeiten, es als Leser zu nutzen. Man muss es nicht chronologisch abarbeiten, sondern kann seinen eigenen Weg durchs Buch finden.

Dennoch sollte man sich zu Anfang dadurch ins Thema ziehen lassen, dass man im Abschnitt A den ‚Weg des guten und schwachen Rechners‘ verfolgt, um die Änderung der Aufmerksamkeit nachzuvollziehen, welche der für den Unterricht vorgeschlagenen Materialebene zugrunde liegt.

Dann ist es möglich, je nach Interesse, in beliebiger Reihenfolge die Abschnitte B1 (Mit Sachen rechnen) und B3 (Rechnen mit Rechenmitteln) zu lesen, weil hier die Konsequenzen

für den Unterricht ganz praktisch vorgestellt werden. In diesen Abschnitten kann man auch später gezielt nachschlagen, wenn man eine Anregung sucht oder ein konkretes Problem hat. Im Abschnitt C ist vor allem der Abschnitt C2 (Das zweite Schuljahr) von ergänzender Bedeutung, weil darin der ansonsten nicht berücksichtigte Aspekt der Einführung von Multiplikation und Division, einschließlich des ‚kleinen Einmaleins‘, behandelt wird. Und wer sich auf ein kommendes Schuljahr vorbereitet, kann im jeweiligen Abschnitt in C nachlesen, was die im Kern wesentlichen Einsichten sind, die es jenseits aller Detailthemen in diesem Schuljahr im Blick auf das Rechnenlernen zu vermitteln gibt.

Derjenige, der auf diese Weise ein vertieftes Interesse gewonnen hat, wie diejenigen, die das Buch vor allem im Blick auf den Diagnose- und Förderaspekt oder aus fachdidaktischer Perspektive lesen, sollten sich nun mit den ausgelassenen Abschnitten befassen. Bedeutsam ist dabei insbesondere der Abschnitt B2 (Rechenmittel), in dem die ‚Stufen der Abstraktion‘ benannt werden, nach denen die Rechenmittel aufeinander aufbauen. Dieser Abschnitt ist grundlegend, denn hier wird noch einmal explizit benannt, wie und in welcher Weise sich die aufeinander folgenden Rechenmittel ergänzen, so dass deutlich wird, an welchem Punkt es jeweils sinnvoll ist, in der Arbeit von einem Rechenmittel auf ein neues überzugehen. Gerade für Sonderschullehrerinnen bzw. diejenigen, die häufiger diagnostische Aufgaben durchzuführen haben, ist dieser Abschnitt von besonderer Bedeutung.

Während mit dem Abschnitt B2 der Blick durch eine größere Präzision verfeinert wird, hilft Abschnitt C, sich abschließend einen Überblick über das Ganze zu verschaffen. Die in den Rechenmitteln vorgestellte Stufung wird auf die Realität unserer (meist) vierjährigen Grundschule bezogen, so dass es leichter fällt, das im eigenen Unterricht Beobachtete einzuordnen, bzw. die nächsten Schritte vor dem Hintergrund der Gesamtperspektive zu planen.

Hier geht es noch einmal um den tieferen Sinn, den bildenden Gehalt, den wir – jenseits von den konkreten Rechentechniken – im Auge behalten müssen, wenn wir den Rechenunterricht eben doch und vor allem als Teil des *Mathematik*unterrichts nicht aus den Augen verlieren wollen.

Mit diesem Buch habe ich das Ziel, neue Aspekte in die fachdidaktische Diskussion einzubringen. Vor allem aber möchte ich Lehrer und Lehrerinnen ‚auf den Geschmack‘ bringen. Ich möchte ihnen Anregungen an die Hand zu geben, was sie in ihrem Unterricht verändern und wie sie in diesen Bausteine einbauen können, die den gestellten Ansprüchen gerecht werden. Dieses Buch soll ein Werkzeug sein für die Weiterentwicklung von Unterricht. Und da es letztlich – wie bei allem Lernen – um die gemeinsame Entwicklung und Reflektion von Erfahrung geht, bin ich für Erfahrungsberichte und Rückkopplungen ganz besonders dankbar.

Aus diesem Grund danke ich an dieser Stelle schon einmal Annegret, die die erste war, die sich für meine Ideen interessierte und (als nicht vom Fach kommende Lehrerin) ausprobierte. Ihre positive Rückkopplung war ein Ansporn für mich, die Grundlagen meines Rechenunterrichts genauer zu durchdenken und breiter öffentlich zu machen.

Frankfurt/M., Januar 2006