

1.1 Anliegen

Mittlerweile fordern einige Mathematiklehrrmittel zu einem aktiven Lernen, zu individuellen Wegen und Kompetenzerweiterungen heraus. Die Rede ist von „substanziellen Aufgaben“ oder von „Lernumgebungen“, welche den Umgang mit Verschiedenheit durch eine „natürliche Differenzierung“ beantworten (vgl. Hengartner, Hirt & Wälti 2007; Hirt & Wälti 2008; Hess & Wälti 2009a, b; Ruwisch & Peter-Koop 2003; Rasch 2001, 2007). In diesem Sinne ist die bekannte Botschaft eines konstruktivistisch verstandenen Lernens – maßgeblich dank der Bewegung „mathe 2000“ (Wittmann 1997; vgl. Hess 2003) – ein Stück näher in Richtung Unterrichtspraxis gerückt.

Allerdings: Keine – auch noch so tolle – Aufgabe kann die Verantwortung für ein wirkungsvolles Lernen übernehmen (vgl. Lipowsky 2002).

Der vorliegende Ansatz beleuchtet *subjektseitig aufzubauende Kompetenzen* und deren *Begleitung* vom Kindergarten bis zum Ende der 2. Grundschulklasse.² Er legt fachdidaktische, entwicklungs- und kognitionspsychologische sowie (sonder-)pädagogische Hintergründe dar, um Lernzeiten und -begleitungen zu optimieren. Lehrkräfte erhalten begründete Hinweise, welche individuellen Lernprozesse und Entwicklungen mit welchen Mitteln in welche Richtung und mit welcher Verbindlichkeit auszulösen sind.

Provokation. Folgende Annahmen verdeutlichen die Schwerpunkte dieser Publikation:

- ▶ Erzieherinnen bzw. Kindergartenlehrkräfte haben keinen genügend klaren Auftrag oder wenig gesichertes Wissen bezüglich „mathematischer Vorläuferfertigkeiten“³ und der Gestaltung eines Fachunterrichts, der zur Lernkultur des Kindergartens passt.
- ▶ Grundschullehrkräfte der ersten beiden Jahre sind unsicher bezüglich mathematischer Grundkompetenzen, welche der schulische Unterricht voraussetzt und weiterführen möchte. Dies wäre insbesondere von Bedeutung, wenn Kinder Schwierigkeiten bekommen, weil ihnen Verstehensgrundlagen fehlen.
- ▶ Grundschullehrkräfte begründen mit Bildungszielen und Lehrplanvorgaben, welche Aufgaben Kinder bis Ende eines Schuljahres „können“ sollten (z. B. Additionen im 20er-Raum). Manche haben nur eine geringe Ahnung, *wie* oder *mit welchen Strategien* die Kinder Aufgaben lösen und welche Kompetenzunterschiede innerhalb einer Klasse bestehen. Insbesondere beklagen sich Lehrkräfte in der Fortbildung selber darüber, dass sie entsprechende *Kompetenzunterschiede nicht befriedigend diagnostizieren*, geschweige denn *entwicklungs- und förderorientiert begleiten* können (vgl. Hess & Wälti 2009a, b).

Es wäre sinnvoll, die Frage „Welche Aufgaben sind zu lösen?“ durch die Frage „Welche Kompetenzen gilt es aufzubauen?“ zu ersetzen.

Schwerpunkte. Eine *entwicklungs- und kompetenzorientierte Fachdidaktik* stellt primär Fragen des „Wie“ (wie lösen Kinder Aufgaben?) und „Warum“ (warum tun sie es so?). Das ergibt Sinn, weil die eigentlichen Kompetenzunterschiede in den verfügbaren Rechenstrategien und Verstehensleistungen liegen und weniger in der Fähigkeit, richtige Resultate zu erzeugen. Zudem rufen mathematische Kompetenzerweiterungen – insbesondere in den ersten 4 Bildungsjahren – nach einem handelnden, zeichnenden, musizierenden, sprechenden oder kurz: nach Fächer verbindendem Tun. Auch eine solche Ausrichtung befriedigt erst, wenn Klarheit darüber besteht, warum wonach gesucht wird. Das *Was* – an welchen Aufgaben die Kinder unter welchen Bedingungen günstig lernen – kommt auch, aber erst sekundär zur Sprache.

Die Akzente zeigen in vier Richtungen:

- ▶ Der kompetenzorientierte Ansatz betont ein Lernen, das bei *individuellen Stärken* ansetzt und die *Kraft des Erfolges* nutzt. Er wendet sich ab von der „beflissenen Suche“ nach Fehlendem.
- ▶ Wissens- und Verstehensunterschiede sind also nicht zu bekämpfen, sondern produktiv zu nutzen. Das gemeinsame bzw. *dialogische* Lernen gründet auf Differenzen und entfaltet erst damit seine Wirkung.
- ▶ Die *Überwindung aufwendiger Zählstrategien* ist bei manchen Kindern ein komplexer und langwieriger Prozess. Verschiedene und frühzeitig angelegte Angebote können die Erfolgchancen eines „denkenden Rechnens“ wesentlich erhöhen (vgl. Krauthausen 1995).
- ▶ Eine kompetenzorientierte Fachdidaktik appelliert an eine *unverschleierte* und *öffentliche Auseinandersetzung* mit mathematischen Strategien. „Unverschleiert“ meint, dass es keine künstlichen Verpackungen oder bunten Anreize braucht, um eine mathematische Neugier zu wecken (Wittmann & Müller 2010a). Kinder suchen mathematische Herausforderungen aus natürlichem Antrieb heraus bzw. nehmen Angebote an, wenn sie einen Einstieg und „irgendwie Neues“ finden. Das Postulat der „Öffentlichkeit“ stellt private, nebensächliche oder versteckte Rechenverfahren in ein dialogisches Unterrichtszentrum. Bisherige „Belanglosigkeiten“ erhalten damit eine neue didaktische Bewusstheit im Sinne einer „gemeinsamen Hauptsache“.

1.2 Eine kurze Übersicht über diesen Band

Entwicklungs- und kompetenzorientierte Mathematikdidaktik. *Kapitel 2* entfaltet Grundlagen eines *entwicklungsgerechten Mathematikunterrichts*. Es sind einige Besonderheiten des Denkens 4- bis 8-jähriger Kinder zu beachten, damit fachli-

che Angebote in beabsichtigter Richtung greifen. Aus Piagets Theorie zur Denalentwicklung lässt sich zum Beispiel ableiten, dass 3- oder 4-jährige Kinder einer subjektiven Logik folgen und mathematisch-logische Beziehungen erst später verstehen können. Es wäre fatal, wenn diese Zeit als – möglichst schnell zu überwindende – Mängelphase angeschaut würde. Die Kinder sollen sich beim frühen „Mathetreiben“ intensiv mit ihrer eigenen Logik auseinandersetzen. Sie wachsen in ihrem Urteilsvermögen, wenn sie wiederkehrend Grenzen erfahren und bestehende Konzepte revidieren.

Bereits kleine Kinder erkunden mathematische Spielräume und entwickeln aus positiven und negativen Erfahrungen entsprechende *Haltungen*. Die emotionalen bzw. motivationalen Voraussetzungen beeinflussen ihr weiteres Lernverhalten und die Leistungsentwicklung entscheidend (vgl. Kap. 2.2, 6.5.5).

Grundlegende Konzepte und Strategien. *Kapitel 3* beleuchtet zentrale mathematische Konzepte und Strategien. In der Regel sind kleine Kinder hoch motiviert, Mathematik zu treiben. Sie zählen alles Mögliche, bauen Treppen und Türme, reihen Perlen zu Kettenmustern, spielen „Einkaufen“ oder „Kochen“, sie bezahlen, schneiden, messen, verteilen oder telefonieren. Solche Motive und Motivationen werden 4 Inhaltsbereichen zugeordnet:

- ▶ *pränumerische Operationen*: Muster legen und Ordnungssysteme finden
- ▶ *Mengenverständnis*: Veränderungen und Beziehungen von und zwischen Mengen verstehen
- ▶ *Aspekte des Zahlbegriffs*: Zählzahl und Anzahl unterscheiden, Zahlbeziehungen nutzen
- ▶ *Zählentwicklung*: verbale Zählkompetenzen erweitern und „Dinge“ flexibel abzählen

Die pränumerischen Operationen erklären die Logik grundlegender Mengen-, Zahl- und Zählkonzepte, und sie verweisen auf Lerninhalte zum Aufbau dieser Konzepte. Allerdings sind sie weder eine notwendige noch eine hinreichende Voraussetzung dafür, dass Kinder logisch-mathematische Beziehungen verstehen. Das Kapitel beschreibt hauptsächlich diejenigen *mathematischen Grundkompetenzen*, welche bereits im Kindergartenalter präzise vorhersagen lassen, wie erfolgreich die mathematische Leistungsentwicklung bis Ende der 4. Klasse verlaufen wird. Angesprochen ist ein Modell von Krajewski (2003, 2008), welches entwicklungsbezogene Kompetenzstufen vorschlägt.

Mathematische Entwicklung bis zum Schuleintritt. *Kapitel 4* betont, dass manche Kinder gezielter vorschulischer Lernanregungen bedürfen, damit sie bei Schuleintritt über die notwendigen mathematischen Grundkompetenzen verfügen. Es fordert vom schulischen Anfangsunterricht, dass er die unterschiedlichen Verfügbarkeiten sorgfältig prüft und Kindern mit bescheidenen Voraussetzungen weitere Lernchancen geben soll, um eine solide Basis aufzubauen.

Kapitel 4.2 zum vorschulischen Kompetenzaufbau gibt dem Kindergarten Lernhinweise und dem schulischen Anfangsunterricht eine Einsicht in die Entwicklungslogik. Letztere trägt dazu bei, momentane Konzepte und Strategien der Kinder zu erkennen und gezielt zu erweitern. Ein Wissen um bisherige Lernprozesse ist notwendig und hilfreich, weil der schulische Unterricht verschieden begonnene und fortgeschrittene „Lerngeschichten“ zu begleiten hat.

Kapitel 4.3 fokussiert das Leistungsspektrum 5- und 6-jähriger Kinder bezüglich verschiedener mathematischer Grundkompetenzen. Die Ergebnisse führen zur Konsequenz, dass die Frühförderung zentrale Konzepte längerfristig anvisieren soll.

Kapitel 4.4 zitiert drei Studien zu mathematischen Kompetenzen bei Schulbeginn. Diese zeigen eindrücklich, wie „Heterogenität“ konkret aussehen kann bzw. dass Kinder mit weit fortgeschrittenen Möglichkeiten und solche mit sehr bescheidenen Grundlagen dieselbe erste Klasse besuchen.

Strategien in Grundoperationen. *Kapitel 5* beschreibt *arithmetische Strategien* und bezieht sie auf die Wurzeln bzw. die mathematischen Grundkompetenzen. Es wird deutlich, dass Kinder mit ihren Rechenverfahren auf relevante Wissens- und Verstehensunterschiede hinweisen können.

Spätestens Ende der 1. Klasse sollten Zählstrategien – zumindest teilweise – durch ökonomischere Verfahren abgelöst sein. Ein Unterricht bereitet darauf vor, wenn er während des *ganzen* Schuljahres weiterführende Strategien anregt. Angesprochen sind statische Fingerbilder, mentale Mengenvorstellungen und -gliederungen, die Nutzung operativer Beziehungen und ein vernetztes Abrufwissen. Solche Angebote führen zum Erfolg, wenn sie eine hohe unterrichtliche Priorität genießen und in großzügigen Zeitgefäßen stehen.

Didaktik zur Strategie-Bewusstheit. *Kapitel 6* legt dar, welche Gelingensbedingungen und welche *didaktischen Mittel* zu einem erfolgreichen Kompetenzaufbau führen. Die Hinweise gehen von einem sozial-konstruktivistischen Lernverständnis aus, welches von Lehrkräften einige didaktische „Übersetzungen“ und die Initiierung sozialer Lernprozesse verlangt. Diesen Anspruch konkretisieren die *Kapitel 6.2* bis *6.4*:

- ▶ Beim sozialkonstruktivistisch orientierten Lernen erhält die Reflexion – und das Gespräch darüber – die Funktion eines Schlüssels, welcher Türen in Richtung Bewusstheit und Verstehen öffnet. Im Alter zwischen 4 und 8 Jahren ist es von erheblicher Bedeutung, dass die *Reflexion* nicht „nur“ über die Verbalsprache erfolgt, sondern mit handlungs-, bild- und mathematisch-symbolischen Wissensformen und Darstellungsmöglichkeiten erweitert wird.
- ▶ Im Gespräch erhält die Reflexion eine soziale Funktion. Der Ansatz des *dialogischen Lernens* nach Urs Ruf und Peter Gallin (1999a, b) bietet einen didak-

tischen Rahmen, der mit Reisetagebüchern oder Mathekonferenzen vielversprechend umsetzbar ist.

- ▶ Eine differenzierte Fachdidaktik darf nicht zu einem Unterricht führen, der häppchenweise Strategien beibringt. Hier formulierte Anliegen verweisen auf *Lernumgebungen* mit reichhaltigen Aufgaben, die allen Kindern Zugänge und breit gestreute Herausforderungen bieten bzw. „natürlich differenzieren“. Die Lehrkraft sichert die Lernprozesse, indem sie arrangiert, anregt, verlangt und spezifische Impulse setzt. Damit überlässt sie die Lernverantwortung weder den Aufgaben noch dem Kind. Sie sucht eine wachsende *Mitverantwortung* der Kinder und eine *zunehmend* autonome Lernkultur, weil *eigenständiges* Lernen häufig überfordert.

Ein kompetenzorientierter Unterricht ist auch ein *integrativer Unterricht*. Er toleriert Heterogenität nicht nur, sondern bejaht diese und nutzt deren Potenzial. Damit ist eine Haltung gegenüber „Rechenschwierigkeiten“ bzw. „Dyskalkulie“ verbunden, welche möglichst früh Standorte ermittelt und ebenso früh entsprechende Lernprozesse auslöst. Wenn eine Förderung spät einsetzt oder lediglich die Bewältigung aktueller Aufgaben anstrebt, findet ein oberflächliches, kaum nachhaltiges „Flickwerk“ statt und das gemeinsame Lernen wird zunehmend schwieriger. Tab. 29 gibt eine einfache Orientierung darüber, welche Kompetenzen langfristig aufzubauen sind und zu welchen Zeitpunkten welche fehlenden Kompetenzen einen „didaktischen Alarm“ auslösen sollten.⁴ Ein integrativer Unterricht orientiert sich primär an *gemeinsamen* Lernangeboten und weniger an der „Isolation im Schulzimmer“ (vgl. Abb. 114).

Beispiele von Lernumgebungen. Die Lernumgebungen „Musterschlangen“, „Einkaufen“, „Würfelhäuser“, „Auf einen Blick“, „Wege in der Plustafel“ und „Multiplikatives Netzwerk aufbauen“ sind verschiedenen Kapiteln zugeordnet. Sie zeigen substanzielle Aufgaben und kriterienorientierte Anforderungen der ersten 4 Bildungsjahre (2 Kindergartenjahre sowie die 1. und 2. Klasse). Die Förderhinweise für Kinder, welche minimale Anforderungen nicht erfüllen, beinhalten spezifische Spielangebote (vgl. Hess & Wälti 2009a, b). Die Beispiele weisen auf mögliche Umsetzungen in kompetenzorientierten Kindergärten und Grundschulklassen hin. Sie wurden in einem Projekt mit Fachdidaktikern und Lehrkräften entwickelt, erprobt und evaluiert.

Zentrale Anliegen. *Kapitel 7* erhebt stufenspezifische Ansprüche an den Mathematikunterricht. Es kommt zum Ausdruck, dass der *Kindergarten* ein eigenes Selbstverständnis gegenüber mathematischem Lernen und einer entsprechenden Lernkultur zu entwickeln hat, also keiner verdünnten Schulmathematik nachstreben muss. Der stufenspezifische Anspruch bestünde darin, Lernvoraussetzungen mit fachlichen und „fächerverbindenden“ Angeboten abzuholen und Bildungskontinuität in Richtung Schule sicherzustellen.

Auch in der *Grundschule* bedeutet Kompetenzorientierung, dass sie unabhängig von Schuleintritt und Klassenstufe an Verfügbarem anknüpfen lässt, allen Kindern wirkliche Herausforderungen bietet und keine künstlichen Begrenzungen vornimmt. Die Schule bekommt dadurch ein Profil mit klarer Förderorientierung und pädagogisch motivierter Integration: Im Zentrum stehen das Kind und seine Bedürfnisse nach Anerkennung, Mitteilung und Kompetenzerweiterung.

Kinder brauchen Strategien. Das Wort *brauchen* lässt sich hinsichtlich „gebrauchen“ und hinsichtlich „darauf angewiesen sein“ deuten. Kinder „gebrauchen“ Strategien, wenn sie mathematische Regeln und Gesetze für Vereinfachungen nutzen. Die zweite Bedeutung meint, dass Kinder auf alternative Strategien angewiesen sind und solche „brauchen“, um Lösungswege zu optimieren.