Lösungshilfen

TIMO LEUDERS, JULIANE LEUDERS

Mathe können – Ein Ratgeber für Eltern

16 x 23 cm, 160 Seiten in Farbe

978-3-7800-1061-2, € 24,95

Unser Leserservice berät Sie gern:
Telefon: 0511/4 00 04 -150
Fax: 0511/4 00 04 -170
leserservice@friedrich-verlag.de

www.klett-kallmeyer.de

Tipp für Zuhause

Haben Sie übrigens bemerkt, dass in der Tabelle oben bei Deutschland mit 21 % + 40 % + 40 % mehr als 100 % herauskommen? Welche Prozentwerte könnten zu dieser Konstellation geführt haben? In der Schule haben Sie sicher kein Verfahren gelernt, um diese Frage zu beantworten. Aber wenn Sie oder Ihr Kind Ihre Kenntnisse über Runden verbinden können mit der Fähigkeit, eigene Lösungswege zu suchen, finden Sie sicher eine Lösung. Vielleicht ist Ihr Kind hier sogar kompetenter als Sie?

Dass die Summe nicht 100 %, sondern 101 % ergibt, liegt daran, dass hier gerundet wurde.
Die übliche Regel lautet

„Immer zur nächsten ganzen Zahl“

also werden

20,1 20,2 20,3 20,4 auf 20 abgerundet und
20,6 20,7 20,8 20,9 auf 21 aufgerundet

Im Fall von 20,5 könnte man auf oder abrunden, denn 20 und 21 sind gleich weit entfernt. Hier hat sich eingebürgert, dass man aufrundet, hier also auf 21.
Nun muss man bei dieser Frage aber umgekehrt denken: Nicht „Was kommt beim Runden heraus?“, sondern „Von welcher Zahl ging man beim Runden aus?“. Die Antwort ist natürlich nicht mehr eindeutig.

21% könnte das Ergebnis einer Rundung von 20,5 % bis 21,4 % sein.
40% könnte das Ergebnis einer Rundung von 39,5 % bis 40,4 % sein.

Wenn die Summe der gerundeten Werte zu groß ist, dann liegt das vermutlich daran, dass zweimal aufgerundet wurde. Beispielsweise könnte man von 20,5 %, 39,5 % und 40 % ausgegangen sein. Denkbar wäre aber auch 20,7 % und 39,7 %, die dritte Zahl müsste dann 39,6 % sein. Die Lösung 20,8 % und 39,8 % ginge aber schon nicht mehr, weil die dritte Zahl dann 39,4 % lauten und auf 39% abgerundet werden müsste.

Vielleicht reichen Ihnen diese Lösungen schon, vielleicht wollen Sie es aber auch genauer wissen. In dieser Tabelle steht jeweils, was als Summe der gerundeten Werte herauskommt, wenn man die beiden Zahlenwerte oben und links annimmt (der dritte ergibt sich immer aus den anderen beiden).

	20,5	20,6	20,7	20,8	20,9	21	21,1	21,2	21,3	21,4
39,5	101	101	101	101	101	101	100	100	100	100
39,6	101	101	101	101	101	100	100	100	100	100
39,7	101	101	101	101	100	100	100	100	100	100
39,8	101	101	101	100	100	100	100	100	100	100
39,9	101	101	100	100	100	100	100	100	100	100
40	101	100	100	100	100	100	100	100	100	100
40,1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
40,2	100	100	100	100	100	100	100	100	100	99
40,3	100	100	100	100	100	100	100	100	99	99
40,4	100	100	100	100	100	100	100	99	99	99

Tipp für Zuhause

Wenn Sie mit Ihrem Kind Aufgaben mit negativen Zahlen üben, nutzen Sie anschauliche Beispiele. Sie können immer, wenn Plus oder Minus gerechnet wird, fragen:

– Was würde die Aufgabe für einen Aufzug bedeuten?
  (Wenn die Aufgabe nur ganze Zahlen enthält.)
– Wie sähe das an einem Thermometer aus?
  (Wenn auch Kommazahlen vorkommen.)
– Formuliere erst eine ähnliche Aufgabe mit weniger Minuszahlen!
  (Also sich statt (–5) – (–2) erst 5 – (–2) und (–5) – 2 vorstellen und rechnen.)

10 – 5 = 5 bedeutet: Der Aufzug fährt vom 10. Stock 5 Stockwerke herunter und kommt im 5. Stock an.

10 – (-5) = 15 bedeutet: Der Aufzug fährt vom 10. Stock -5 Stockwerke herunter, also 5 hoch und kommt im 15. Stock an.

Beim Thermometer kann man es auf verschiedene Weisen lesen, z. B.

10 – (-5) = 15 bedeutet: Vom 10 Grad wird es -5 Grad kälter, also 5 Grad wärmer („Minus als Umdrehen der Richtung“).

Aber es geht auch so:

Die Temperatur ist um 5 Grad gesunken und ist jetzt 10 Grad. Wie hoch war sie, bevor sie gesunken ist? („Minus als Umkehrung der Blickrichtung“)

Meist ist auch diese Sichtweise hilfreich:

Wie groß ist die Differenz zwischen 10 und -5 Grad? („Minus als Unterschied“)

$10 - 10 = 0$
$10 - 5 = 5$
$10 - 0 = 10$
$10 - (-5) = 15$
$10 - (-10) = 20$
$10 - (-15) = 25$

Tipp für Zuhause

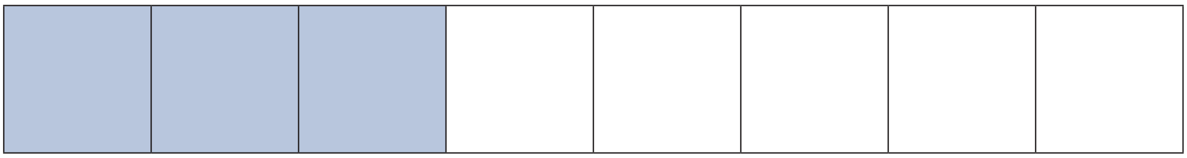
Wann immer Ihnen und Ihrem Kind eine Bruchzahl begegnet, sprechen Sie darüber, was sie bedeutet.

- Im Rezept steht: Drei achtel Liter Milch – wie viel ist das?
- Wenn ich ein viertel Liter Milch pro Person benötige, wie viele Tüten Milch brauche ich dann für 10 Personen?
- Wie viele Minuten hat eine Viertelstunde? Wie viele eine Dreiviertelstunde? Welcher Bruch entspricht 10 Minuten?

Bruchzahlen und Rechnungen mit Brüchen kann man sich auf viele Arten vorstellen:

Drei Achtelliter:

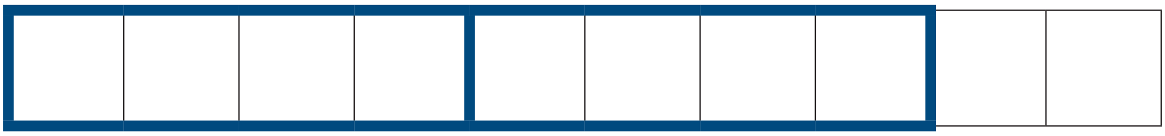
Ein Achtel ist die Hälfte von einem Viertel. Zwei Achtel sind also ein Viertel.
Dann kommt noch ein drittes Achtel dazu. Für viele ist es leichter, wenn man sich das als Bild vorstellt:



Auch als Hundertstel oder Tausendstel kann man es sich gut vorstellen: Ein Liter sind 1000 Milliliter (oder auch 100 Zentiliter).
Ein Viertel sind 250 Milliliter, ein Achtel sind 125 Milliliter – also sind drei Achtel Liter 375 Milliliter.

Viertelliter Milch für 10 Personen:

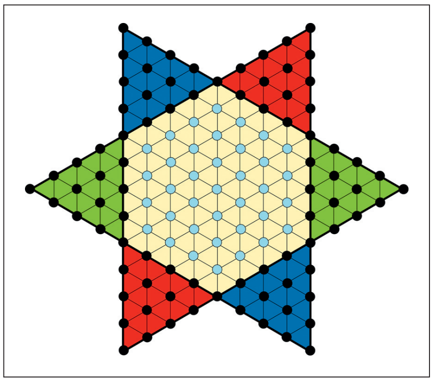
Vier Viertel sind ein Ganzes. Acht Viertel sind also zwei Ganze. Für 10 Personen braucht man 10 Viertel, also 8 Viertel und noch mal zwei Viertel – und das ist ein Halbes. Insgesamt sind es also zweieinhalb Tüten. Auch das kann man sich an einem Bild leicht vorstellen:



Natürlich kann man das auch als Rechnung aufschreiben: $10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{2}{4}$

Tipp für Zuhause

Oft sieht man geometrische Muster, in denen Teile einer Fläche verschieden gefärbt sind. Fragen Sie nach dem Bruchteil!
- Welcher Bruchteil des Spielbretts ist grün?
- So etwas geht bei vielen Flaggen: Welcher Bruchteil ist blau?



Spielbrett:
Wenn man das Sechseck in der Mitte genauer ansieht, erkennt man, dass es aus sechs Dreiecken in derselben Größe wie die äußeren Dreiecke besteht (Stellen Sie sich vor, Sie würden die äußeren Dreiecke nach innen umklappen). Insgesamt besteht das Brett also aus 12 Dreiecken, davon sind 2 grün.
Der Bruchteil beträgt also zwei Zwölftel ($\frac{2}{12}$). Natürlich kann man das auch gröber sehen und „Doppeldreiecke" zählen, dann ist der grüne Anteil ein Sechstel ($\frac{1}{6}$). Wer der Sache nicht traut, kann die kleinen Dreiecke zählen: Es sind 16 in jedem Dreieck und 96 im Sechseck, also ist der Bruchteil insgesamt $\frac{32}{192}$. Sie erkennen hier übrigens gut, dass das Erweitern und Kürzen von Brüchen nichts anderes als Verfeinern oder Vergröbern der Sichtweise bedeutet:

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{32}{192}$$

Flagge:
Die griechische Flagge ist etwas schwieriger, weil man die Länge und Höhe erst schätzen oder messen muss. In der Höhe sind es 9 Kästchen und in der Länge sind es möglicherweise 15. Die dunklen Felder nehmen dann

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 10 + 10 + 10 + 15 + 15 = 76$ Kästchen von $9 \cdot 15 = 135$ Kästchen ein.

Der Bruchteil beträgt also $\frac{76}{135}$ – kürzen geht hier nicht mehr.

Solche Farbanteile kann man übrigens bei sehr vielen Flaggen untersuchen. Manche sind sehr leicht (z. B. Deutschland) und man kann den Bruchteil unmittelbar sehen, manche erfordern mehr Arbeit und Nachdenken.

Tipp für Zuhause

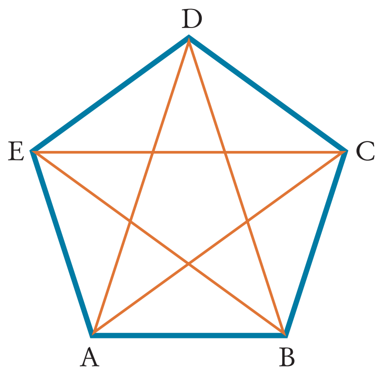
Vorstellungsvermögen testen

- Welche Formen findet man auf einem klassischen Fußball? Welche Formen haben verschiedene Verkehrsschilder?
- Stellen Sie sich vor, in einem Fünfeck von jeder Ecke zu jeder anderen eine Linie zu ziehen. Welche Figur entsteht? Wie viele Linien hat man dann?
- Welche Form haben die beiden Figuren, die entstehen, wenn Sie ein Sechseck von einer Ecke zur gegenüberliegenden Ecke durchschneiden?
- Sind die Gizeh-Pyramiden (der Kölner Dom) genau so hoch wie lang?

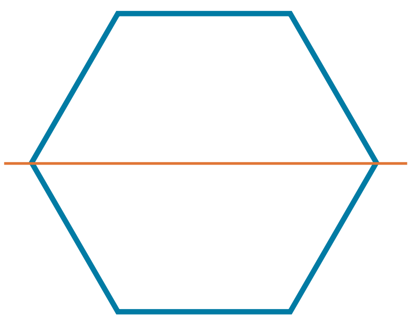
Ob man hier bei seinen Vorstellungen richtig liegt, kann man gut im Internet überprüfen.

Fußball:
Ein klassischer Fußball wird aus 20 Sechsecken und 12 Fünfecken zusammengenäht. Oft sieht man falsche Bilder, in denen ein Zeichner versucht, einen Fußball mit ausschließlich Sechsecken zu zeichnen.

Fünfeck:
Verbindet man im Fünfeck alle Ecken miteinander, so ergibt sich ein schöner, fünfzackiger Stern.



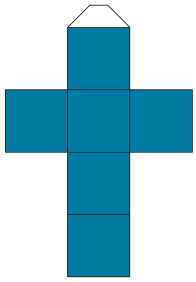
Sechseck:
Es entstehen zwei Trapeze:



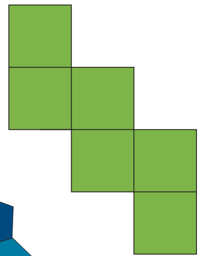
Pyramide:
Der Kölner Dom ist 144,58 m lang und 157,38 m hoch – hätten Sie es gedacht?
Die große Gizeh Pyramide ist 140 m hoch und hat eine Seitenlänge von 230 m.

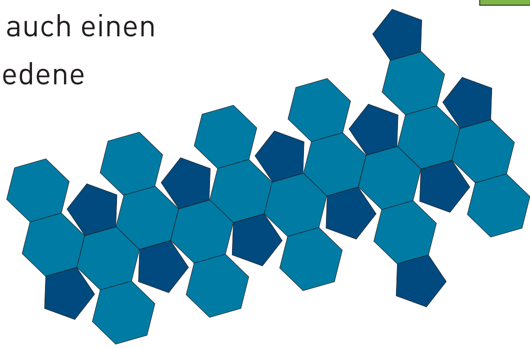
Tipp für Zuhause

Die folgenden Vorstellungsübungen können Sie allein oder mit Ihrem Kind durchführen.



- Wie gut kennen Sie einen Würfel? Schließen Sie die Augen: Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat er? Wenn man nun alle Ecken schräg abschneidet, wie viele Ecken und Kanten hat der entstehende Körper?
- Können Sie sich vorstellen, wie viele Klebekanten man braucht, um den blauen Würfel zu falten – und wo sie angebracht werden müssen? (Eine ist schon eingezeichnet.)
- Wenn Sie den fertigen blauen Würfel halb in einen Eimer mit schwarzer Farbe tauchen, herausziehen und dann wieder aufklappen – wo befindet sich überall Farbe?
- Kann man mit dem grünen Netz auch einen Würfel bauen? Wie viele verschiedene Netze gibt es?
- Welcher Körper entsteht aus dem Netz rechts?



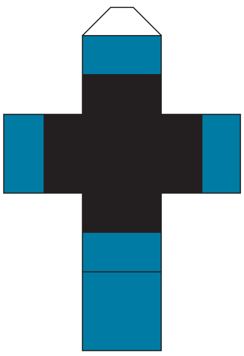


Würfel:

Ein Würfel hat 12 Kanten und 8 Ecken. Wenn man jede Ecke abschneidet, werden aus 1 Ecke 3 Ecken. Das Ergebnis hat also 24 Ecken. An jeder Ecke kommen 3 Kanten hinzu: $12 + 8 \cdot 3 = 36$ Kanten.

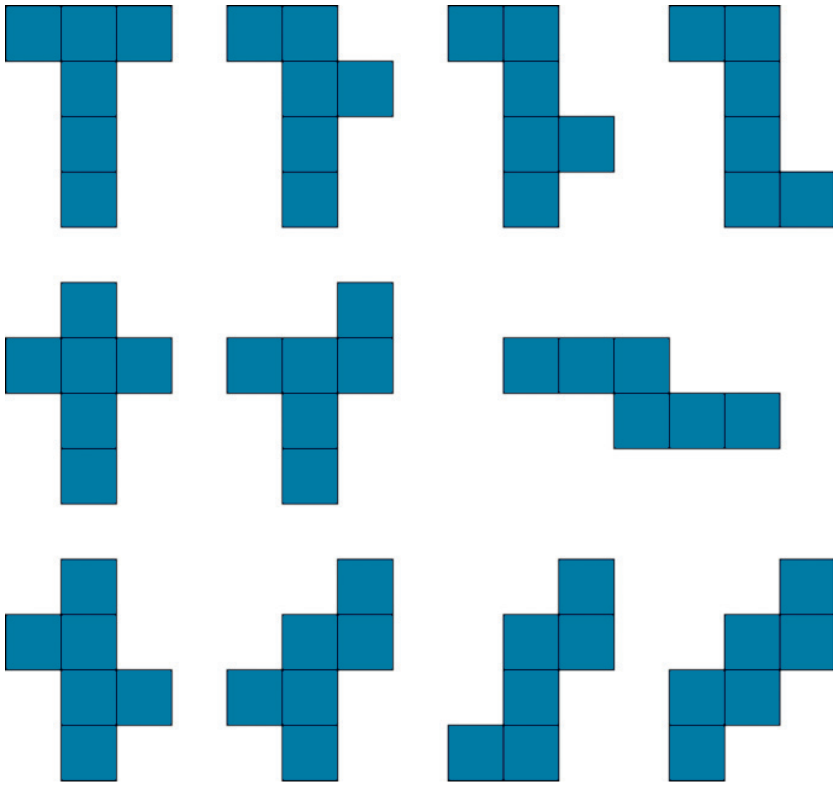
Der Würfel hat 12 Kanten, die alle zusammengefügt werden müssen. Bei der Bastelvorlage für den blauen Würfel hängen 5 Kanten bereits zusammen und müssen nicht mehr geklebt werden, also fehlen noch 7 Klebekanten. Probieren sie es einmal aus!

Wenn man die Fläche in der Mitte des Kreuzes zuerst in die Farbe taucht, ergibt sich folgendes Bild:



Wenn man den Würfel anders eintaucht, z. B. mit einer Ecke voran, wird es komplizierter.

Mit diesen 11 verschiedenen Netzen kann man einen Würfel bauen:



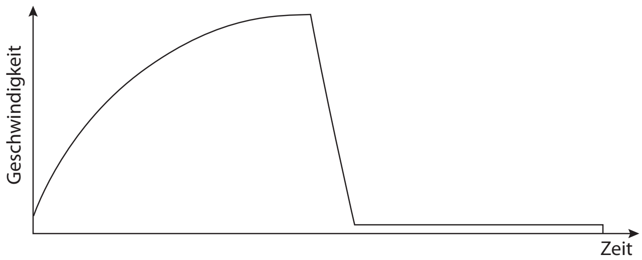
Der Körper aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken ist ein Fußball.

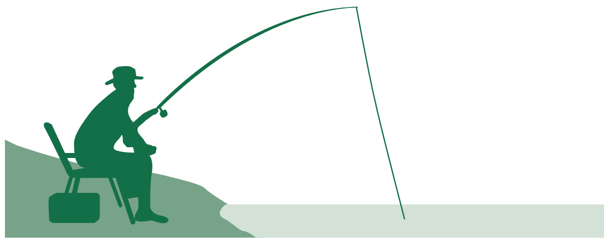
Tipp für Zuhause

Wenn Sie mit Ihrem Kind über Graphen ins Gespräch kommen wollen – dies ist eine bewährte Aufgabe, die die Diskussion anheizt. Das Schöne: Es lassen sich Gründe für jede der Lösungen anführen. Was „richtig" ist, hängt auch von der Argumentation und Überzeugungskraft der Beteiligten ab.

Welcher Sport ist das? Welcher Sport liefert einen Graphen wie diesen hier?
Wähle diejenige Antwort aus der folgenden Liste, die am besten passt:

- Angeln
- Stabhochsprung
- 100-m-Lauf
- Fallschirmspringen
- Golf
- Bogenschießen
- Speerwerfen
- Hochsprung
- Turmspringen
- Billard
- Drag Racing (Auto-Beschleunigungsrennen)
- Wasserski





Erläutere ausführlich deine Wahl:

- Wie und warum erfüllt die von dir ausgewählte Sportart den charakteristischen Verlauf des Graphen?
- Warum passt jede der anderen Sportarten nicht (oder nicht so gut)?

Das Schöne bei dieser Aufgabe: Bei sehr vielen Sportarten lässt sich begründen, warum sie zum Graphen passt. Aber nicht immer ist die Erklärung gleich plausibel. Man muss natürlich beachten, dass auf der senkrechten Achse die Geschwindigkeit eingetragen ist. Es ergibt sich also eine Bewegung, die zunächst immer schneller wird, also beschleunigt (Geschwindigkeit steigt mit der Zeit). Diese Beschleunigung wird aber weniger, bis nach einiger Zeit die Geschwindigkeit plötzlich stark abnimmt und dann auf niedrigem Niveau bleibt.

Beispiel Fallschirmspringen:

Zuerst fällt der Springer immer schneller, bis der Luftwiderstand so groß ist, dass die Geschwindigkeit ein Maximum erreicht. Wird dann der Schirm geöffnet, fällt die Geschwindigkeit sprunghaft auf einen sehr kleinen Wert, der bis zum Landen konstant bleibt.

Beispiel Speerwerfen:

Hier ist das Problem, dass der Speer, wenn er erstmal die Wurfhand verlässt, nicht schneller werden kann.

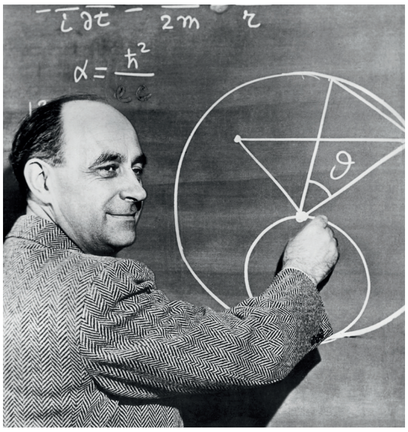
Beispiel Angeln:

Das Schleudern und Auswerfen eines Köders und das Auftreffen auf dem Wasser könnte so aussehen, wie im Graphen beschrieben. Das Angelbild unten ist aber trügerisch: Die Form des Graphen ist ja der Verlauf der Geschwindigkeit und nicht die Form der Angel.

Tipp für Zuhause

Fermi-Fragen für die ganze Familie

- Ist der Bodensee groß genug, dass alle Deutschen
  a) um ihn herum stehen können,
  b) auf ihm stehen können (wenn er zugefroren ist),
  c) in ihm Platz hätten (wenn man das Wasser herauslässt)?
- Wie viele Kilometer legst du jedes Jahr zu Fuß zurück?
- Wie oft schlägt dein Herz jedes Jahr?
- Wie viele Nadeln hat ein Weihnachtsbaum?



1. Annahmen

Erst einmal muss man einige Werte schätzen oder nachschlagen:

- Geschätzte Länge des Sees: 60 – 70 km
- Geschätzte Uferlänge: 120 – 200 km = 120.000 bis 200.000 m
  Wenn man allerdings die vielen kleinen Buchten und Vorsprünge des Ufers mit einbezieht, kann man auch mit wesentlich größeren Werten rechnen!
- Geschätzte mittlere Breite: 7 – 12 km
- Angegebene mittlere Tiefe: 90 m

2. Berechnungen der Seemaße

Die Uferlänge wurde oben schon geschätzt. Für die Fragen sind aber noch weitere Werte wichtig. Da es nicht genau sein muss, reicht es, sich den See als Quader vorzustellen.

- Fläche: Hier rechnet man Länge mal Breite, also:
  (60 bis 70 km) · (7 bis 12 km) = 400 bis 900 km² = 400 bis 900 Millionen m²
- Volumen: Berechnet sich aus Länge mal Breite mal Höhe, oder kürzer: Fläche mal Höhe (bzw. in diesem Fall: Tiefe) : (400 bis 900 km²) · 0,09 km = 45 bis 80 km³ = 45 bis 80 Milliarden m³

3. Annahmen und Berechnungen zum Menschen

- Angenommene Breite eines Menschen: 0,5 bis 1,5 m (je nachdem, ob die Arme gestreckt sind)
- Angenommene Standfläche eines Menschen: Pro 1 m² können 4 bis 10 Menschen stehen (je nachdem, wie eng noch akzeptabel ist)
- Volumen eines Menschen: Der Körper besteht zum großen Teil aus Wasser. Ein Liter Wasser wiegt 1 kg. Man liegt also nicht ganz falsch, wenn man annimmt, dass ein erwachsener Mensch ungefähr 100 Liter fasst. 1 m³ fasst 1000 Liter, d. h. 10 Menschen pro m³ (wenn man die engste Packung annimmt).
- Etwas mehr Platz erhält man, wenn man sich einen Menschen in einen Quader eingepackt vorstellt, der einen halben Meter breit und tief ist, und zwei Meter hoch: 0,5 m · 0,5 m · 2 m = 0,5 m³, also 2 Menschen pro m³.

4. Mögliche Lösungen

Wie viele Menschen können um den See herum stehen?

– Länge des Seeufers geteilt durch Breite eines Menschen
  (120 bis 200 km) : (1,5 m bis 0,5 m) = 80.000 bis 400.000 Menschen. Am Seeufer können also gerade mal alle Menschen einer Großstadt stehen.

Standfläche auf dem zugefrorenen See:

Fläche des Sees in m^2 mal die Anzahl Menschen, die auf einen m^2 passen
(400 bis 900 Millionen m^2) · (4 bis 10 Menschen pro m^2) = 800 Millionen bis 9 Milliarden Menschen.
Es passt also möglicherweise die ganze Weltbevölkerung darauf.

Platz im See:

Volumen des Sees mal Anzahl der Menschen, die in einen m^3 passt
(45 bis 80 Milliarden m^3) · (2 bis 10 Menschen pro m^2) = 90 bis 800 Milliarden Menschen – also mindestens zehnmal so viel wie die Weltbevölkerung!

Wie viel Kilometer legt ein Schüler im Jahr zu Fuß zurück?

Hier kann man zunächst auf verschiedene Arten herausfinden, wie viele Schritte am Tag normal sind – mit einem Schrittzähler, mit der Schätzung, dass es 10.000 sein könnten (das ist der Wert, der für aktive Erwachsene empfohlen wird), oder man misst die Schrittlänge, berechnet, wie viele Schritte auf dem Schulweg gemacht werden, und fügt dann noch weitere Wege im Haus, auf dem Schulhof, beim Spielen usw. hinzu.

Bei 10.000 Schritten am Tag ergeben sich 10.000 · 365 = 3.650.000 Schritte, also ca. 4 Millionen Schritte im Jahr.

Wie oft schlägt das Herz im Jahr?

Der Ruhepuls eines Kindes liegt bei 80–100 Schlägen pro Minute. Bei Bewegung ist er natürlich höher, es macht also Sinn, zumindest mit 100 Schlägen pro Minute zu rechnen.
Das macht

– 100 · 60 = 600 Schläge pro Stunde,
– 600 · 24 = 14.400 Schläge pro Tag,
– 14.400 · 365 = 5.256.000 Schläge pro Jahr

Es sind also mindestens 5 Millionen Schläge im Jahr.

Nadeln eines Weihnachtsbaumes:

Hier ist es sicher am schwierigsten zu schätzen. Diese Aufgabe ist am interessantesten, wenn gerade ein Weihnachtsbaum in der Wohnung steht. Zählen Sie, wie viele Nadeln an 1cm Ast wachsen. Dann messen oder schätzen Sie, wie viel cm Äste der Baum insgesamt hat und rechnen dann: Nadeln pro cm mal Gesamtlänge der Äste.

In der Sendung „Frag doch mal die Maus“ haben viele fleißige Schüler nachgezählt:
eine 1,63 m hohe Nordmanntanne hatte 178.333 Nadeln.

http://www.wdr.de/tv/quarks/sendungsbeitraege/2008/1223/008_weihnachtswissen.jsp

Aufgabenschwierigkeiten herausfinden

a) *Einzelverpackung:*
Gegeben: d = 5 cm.
Umfang Kerze = $2\pi r$
Radius: $\frac{1}{2}$ d = 2,5 cm
also $2\pi \cdot 2{,}5$ cm = 15,7 cm

Banderole für vier Kerzen: 15,7 cm · 4 = 62,8 cm

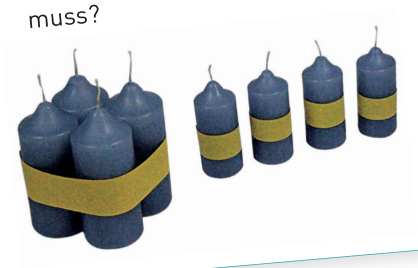
Viererpackung:
In der Zeichnung ist zu erkennen, dass man die Länge der Banderole für die Viererpackung aus dem Kerzenumfang und Durchmesser zusammensetzen kann:

Banderole für Viererpackung:
$4 \cdot 5\,\text{cm} + 4 \cdot \frac{1}{4}$ Kreisumfang = 20 cm + 15,7 cm = 35,7 cm

Die Höhe der Kerzen ist zwar in der Aufgabe mit angegeben, wird aber nicht gebraucht!

35,7 cm entsprechen 100 %. Wie viel Prozent entsprechen dann 62,8 cm?
Mit einem Dreisatz erhält man 176 %. Damit ergeben sich für die Einzelverpackung, dass es im Vergleich zur Vierpackung 176 % sind, also 76 % mehr.

Um wie viel Prozent ist der Banderolenverbrauch bei Einzelverpackung höher als für ein Gebinde aus vier Kerzen in quadratischer Anordnung, wenn diese
a) einen Durchmesser von 5 cm und eine Höhe von 12 cm haben
b) den beliebigen Durchmesser d haben
c) Wie verändert sich das Ergebnis von a) wenn man für die Klebefläche jeweils 3 cm dazurechnen muss?

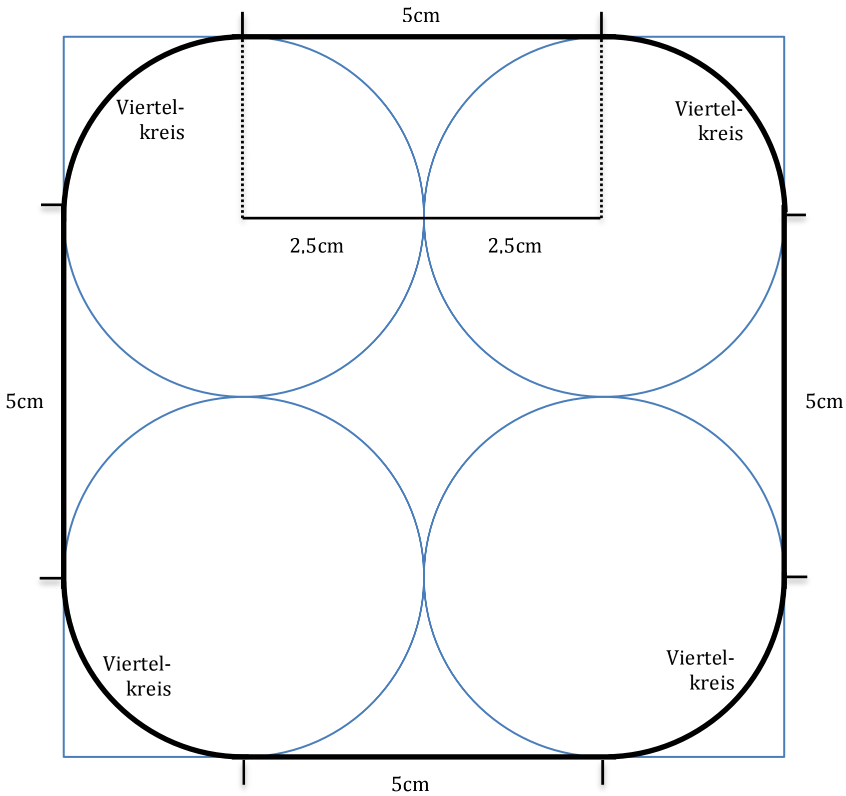


b) *Banderole für vier einzeln verpackte Kerzen:*
$4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 4 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot d = 4 \cdot \pi \cdot d$

Banderole für Viererpackung:
$4 \cdot d + 2 \cdot \pi \cdot r = 4 \cdot d + 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot d = 4 \cdot d + \pi \cdot d = (4 + \pi) \cdot d$
Da der Durchmesser der Kerze sich nicht ändert, muss man nur $4 \cdot \pi$ und $4 + \pi$ vergleichen.

$$\frac{4\pi}{4+\pi} \approx \frac{12{,}56}{7{,}14} \approx 1{,}76 = \frac{176}{100} = 1{,}76\,\%$$

Also wieder 76% mehr! Möglicherweise war Ihnen das auch vorher klar und Sie mussten hier gar nicht rechnen. Das Verhältnis der Banderolenlängen bleibt gleich, auch wenn sich der Durchmesser der Kerzen ändert.



c) Bei der Einzelverpackung kommen $4 \cdot 3$ cm hinzu, bei der Viererpackung nur einmal 3 cm.

Jetzt werden bei Einzelverpackung also sogar 93% mehr verbraucht.

$$\frac{62{,}8 + 12}{35 + 3} = \frac{74{,}8}{38{,}7} = 1{,}93$$