

## Liebe Lehrerin, lieber Lehrer

Stellen Sie sich folgende Situation vor: Eben noch sind einige Schülerinnen und Schüler durchs Klassenzimmer gerannt, haben sich über die gerade absolvierte Französischprüfung ereifert, noch schnell eine SMS auf den Weg geschickt – und jetzt, nur wenige Momente später, sitzen alle konzentriert und mit geschlossenen Augen da.



Was geht hier vor? Sieht so etwa ein moderner Mathematikunterricht aus? Lassen wir gleich zu Beginn einige Schülerinnen und Schüler selbst zu Wort kommen:

*„Mit Vorstellungsübungen machen mathematische Probleme Spaß!“*

*„Sie wecken mein Interesse, da sie lebendiger als Unterrichtsmathe sind.“*

Spaß und Interesse an Mathe? Und worum geht es bei „Vorstellungsübungen“?

*„Vorstellungsübungen sind Übungen, die zum Denken anregen.“*

*„Eine Vorstellungsübung ist eine andere Welt als ein Aufgabenblatt. Ich kann mich dort einfacher bewegen.“*

Das Foto zeigt also keine Schlafenden. Hier nehmen Schülerinnen und Schüler an einer Vorstellungsübung teil und setzen sich dergestalt mit Mathematik auseinander. Was haben sie davon?

*„Ich finde Mathe nicht mehr so kompliziert.“*

*„Ich lasse Matheaufgaben zuerst in meinem Kopf ablaufen und fange erst dann schriftlich an.“*

*„Ich mache jede Vorstellungsübung nochmals mit meinem Vater, was witzig und interessant ist.“*

### **Mathematische Vorstellungsübungen**

Mathematik kann ein gedankliches Abenteuer sein, ein Abenteuer, das sich im Kopf abspielt. Mathematik lebt dann von der Fähigkeit, sich etwas vorzustellen: Objekte und Inhalte werden vor das „innere Auge“ geführt und gedanklich weiterbearbeitet. Im Ergebnis gewinnt man Argumente. Wie lässt sich diese imaginative Seite von Mathematik erlebbar machen und im Unterricht einsetzen?

Mathematische Vorstellungsübungen kultivieren den imaginativen Aspekt unseres Fachs. Zu den Stärken dieses neuen Unterrichtsinstruments gehört, dass Schülerinnen und Schüler mit mathematischen Inhalten direkt und ganz persönlich angesprochen werden. Dadurch finden nicht nur die starken, sondern auch alle anderen Schülerinnen und Schüler einen entdeckenden und persönlichen Zugang zur Mathematik. Sie lernen, sich Mathematikaufgaben bildlicher vorzustellen und ihre individuellen Vorstellungen zu bearbeiten. So fällt es leichter, eigene Lösungswege zu entwickeln. Führen Sie als Lehrperson Vorstellungsübungen im Unterricht durch, erhalten Sie zudem einen Einblick in die Denk- und Lösungswege Ihrer Schülerinnen und Schüler. Hier ein erstes, noch verkürztes Beispiel einer Vorstellungsübung:

Stellen Sie sich einen Plastikbecher vor, der auf dem Boden liegt. Stoßen Sie den Becher an, sodass er zu rollen beginnt. Wie sieht die Bahn aus, auf der er sich bewegt?

Dieser kleine Text regt Ihre Vorstellungen an, besonders dann, wenn Sie ihn nicht selbst lesen, sondern sich in die Rolle des Zuhörers begeben. Die Wörter evozieren gedankliche Bilder und Handlungen, die die beschriebene Situation ausmalen und weiterentwickeln. So können Sie, wenn Sie den Becher in Gedanken anstoßen, „sehen“, vielleicht sogar „spüren“, wie er vorwärts rollt. Sieht Ihr Becher aus wie ein gewöhnlicher Becher – oben etwas weiter als unten –, wird er nicht geradeaus, sondern „um die Kurve“ rollen. Mag sein, dass Sie den Becher mehrfach anstoßen müssen, bis er schließlich wieder genauso wie zu Beginn vor Ihnen liegt. Damit könnte sich seine Bahn schließen. Ob sie sogar kreisförmig ist? Spätestens mit dieser Vermutung sind Sie mathematisch aktiv, sind Sie mittendrin in Ihrer eigenen mathematischen Welt.

Genau diesen Effekt haben Vorstellungsübungen im Unterricht: Sie eröffnen einen Freiraum, in dem man sich auf eine mathematische Situation einlassen, eigene Vorstellungen und Gedanken entwickeln, mathematische Fragen aufwerfen – und damit im besten Sinne Mathematik machen kann. Mathematik spielt sich im Kopf ab!

### **Individuelle Vorstellungen im Unterricht – ihr Wert für Lernprozesse**

Das oben beschriebene Beispiel leitet zwar dazu an, sich einen Sachverhalt vorzustellen. Dennoch bietet es nur Anhaltspunkte, um Platz für die Ausgestaltung individueller und gleichzeitig sachbezogener Vorstellungen zu lassen. So wird weder die genaue Form noch die Größe oder Dicke des Bechers beschrieben, auch wenn das Wort „Plastikbecher“ einen geraden Kreiskegelstumpf von handlicher Größe suggeriert. Auch die Neigung des Bodens, seine Beschaffenheit und die Geschwindigkeit des Rollens bleiben ungenannt. Wenn man einen mathematischen Sachverhalt erkundet, ihn individuell ausgestaltet und vergegenwärtigt, kann er erschlossen werden.

Ist diese Grundlage geschaffen, kann gedanklich gehandelt und experimentiert werden, können Vermutungen formuliert werden, kann man mathematisch aktiv werden. So hängt die Beantwortung der Frage nach der Bahnform davon ab, wie man sich den rollenden Becher vorstellt. Dank Vorerfahrungen und mathematischen Basiskenntnissen stellen sich einfache Vermutungen ein, wie „Der Becher rollt um die Kurve“ oder „Die Gestalt der Bahn hängt von der Form und der Masseverteilung des Bechers ab“. Ob es sich dabei um eine geschlossene oder sogar kreisförmige „Kurve“ handelt, ist zunächst einmal unsicher, ebenso, welche geometrischen und physikalischen Eigenschaften des Bechers die exakte Gestalt der Bahn festlegen. Weitere Fragen schließen sich an: Können zwei Becher mit verschiedenen Formen entlang derselben Bahn rollen? Wie sieht ein Körper aus, der auf einer spiralförmigen Bahn rollt? Diese Fragen stellt man sich aber erst, nachdem man sich den Sachverhalt vor das innere Auge geführt hat.

Vorstellungsübungen können produktive Gedankengänge anstoßen, ja Vorstellungen selbst können ungeheuer produktiv sein. So kann man sich statt des Plastikbechers ein einachsiges Gefährt mit zwei ungleich großen Rädern vorstellen. Oder der Plastikbecher wird durch einen über den Kegelstumpf des Bechers hinaus gedachten Vollkegel ergänzt. Vorstellungen dieser Art sind kreative Eigenleistungen und führen – weil sie den Kern einer möglichen Antwort beinhalten – weit in die Mathematik hinein. Dessen ungeachtet werden sie im Mathematikunterricht kaum thematisiert – ein ungeahntes Potenzial liegt hier brach.

### **Vorstellungsübungen im Unterricht – meine eigenen Erfahrungen als Lehrer**

Bereits meine ersten Versuche mit mathematischen Vorstellungsübungen überraschten mich angenehm, denn meine gymnasialen Klassen ließen sich unerwartet bereitwillig darauf ein. Aber auch noch nach Jahren der Durchführung kommen Vorstellungsübungen so gut bei Schülerinnen und Schülern an, dass sie regelmäßig eingefordert werden.

Nach und nach habe ich den Eindruck gewonnen, dass während der Durchführung der Vorstellungsübungen mehr Schülerinnen und Schüler präsent sind und intensiv mitdenken, als dies im übrigen Unterricht der Fall ist. Das gilt gerade auch für die Leistungsschwächeren. Beim Austausch über ihre Vorstellungen sind sie mit einer Lebhaftigkeit und einem Interesse bei der Sache, wie ich dies nicht für möglich ge-

halten habe. Gerade weil Vorstellungsübungen auf die individuellen Vorstellungen jeder einzelnen Person fokussieren, betrifft Mathematik plötzlich alle. Mit dieser Betroffenheit wächst auch die Bereitschaft, sich mit mathematischen Fragen auseinanderzusetzen.

Für mich als Lehrer ergibt sich darüber hinaus noch ein weiterer, entscheidender Nutzen. Wissen Sie, was sich in den Köpfen Ihrer Schülerinnen und Schüler abspielt, wenn sie Mathematik machen? Wenn ich meinen Lernenden bei der Entwicklung ihrer eigenen Denk- und Lösungswege zuhöre, begegne ich immer wieder einem ungeheuren Reichtum an Ideen. Bei genauerem Hinsehen lassen sich – neben Irrwegen – immer auch produktive Ansätze ausmachen. Ansätze, die ohne Weiteres quer zu meinem Denkweg stehen. Kurz, in den Köpfen meiner Schülerinnen und Schüler sieht es anders aus, als ich das im Voraus zu wissen meine.

Wenn Sie Vorstellungsübungen in Ihrem Mathematikunterricht einsetzen, erhalten Sie als Lehrperson einen vertieften Einblick in die Art und Weise, wie Ihre Schülerinnen und Schüler an fachliche Fragestellungen herangehen und wie sie mathematisch denken. Sie können ernst machen mit der alten Forderung, die Lernenden dort „abzuholen“, wo sie stehen. Wie dies mit Vorstellungsübungen zu erreichen ist, erfahren Sie in diesem Buch.

### **Wie Sie dieses Buch lesen und mit ihm arbeiten können**

Dieses Buch ist vor allem ein Buch für die Praxis. Daher enthält es eine umfangreiche Beispielsammlung. In Teil 2 (S. 59 ff.) finden Sie über dreißig Vorstellungsübungen, nach Anforderungsstruktur und Klassenstufe sortiert. Alle Beispiele werden in unterschiedlichem Ausmaß kommentiert, und zwar mit Blick auf ihren Vorstellungsgehalt und mit Blick auf mathematische Anschlussfragen. Sie stammen aus den verschiedensten Bereichen der (Schul-)Mathematik und sind in gymnasialen Klassen der Klassenstufen 9–13 eingesetzt worden. Einfachere Vorstellungsübungen lassen sich aber auch schon in den Klassenstufen 7 und 8 des Gymnasiums einsetzen.

Wenn Sie vor allem an der praktischen Seite des Unterrichtsinstruments interessiert sind, dann schmökern Sie zuerst im zweiten Teil.

Dieses Buch möchte Sie aber auch anregen, Vorstellungsübungen im Unterricht einzusetzen und eigene Vorstellungsübungen zu entwickeln. Deshalb finden Sie im didaktischen ersten Teil (S. 13 ff.) Hintergründe und Handlungsanleitungen zu diesem Unterrichtsinstrument. So erfahren Sie, was Vorstellungsübungen sind und was nicht, was sie bewirken wollen und was sie erreichen können (S. 14–26). Sie finden aber auch Hinweise, wie Sie Vorstellungsübungen im Unterricht durchführen können und wie sich individuelle Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern für Lernprozesse nutzen lassen (S. 27–47). Im letzten Abschnitt des ersten Teils werden Kriterien benannt, nach denen Sie Ihre eigenen Vorstellungsübungen entwickeln können (S. 48–57).

Wenn Sie vor allem der Konstruktion und dem Einsatz des Unterrichtsinstruments nachspüren möchten, empfiehlt es sich, mit dem ersten Teil zu beginnen.

An welcher Stelle auch immer Sie in dieses Buch einsteigen, es möge Ihnen die Arbeit mit Vorstellungen „schmackhaft machen“ und neue Anregungen zur Gestaltung Ihres Unterrichts bieten. Und falls Sie mir von Ihren Erfahrungen berichten, so freue ich mich.