13. Juli 2011

Bernd Grave

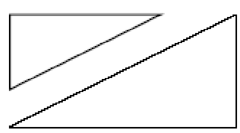
Kopfübungsaufgaben für die Oberstufe

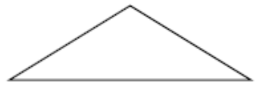
Die Methode der Kopfübungen wird in mathematik lehren 147 im Artikel mit dem Titel "Wider das Vergessen" beschrieben. Kurz gesagt handelt es sich um ein Übungsformat zum Wachhalten von mathematischen Kenntnissen und Fertigkeiten, die im aktuellen Mathematikunterricht nicht im Mittelpunkt stehen. Es wird eine Folie mit zehn im Kopf lösbaren Aufgaben zu zehn verschiedenen Themen präsentiert. Die Schüler haben ca. sieben Minuten Zeit die Aufgaben zu beantworten. (Während dieser Zeit werden die Lösungen selbstverständlich verdeckt.) Danach korrigieren die Schüler ihre Lösungen. Eine ausführliche Besprechung der Aufgaben im Plenum ist nicht vorgesehen.
Im Rahmen des Projektes MABIKOM wird dem Übungsformat der Kopfübungen darüber hinaus eine diagnostische Dimension verliehen. Dies geschieht dadurch, dass in aufeinander folgenden Wochen die zehn Themengebiete, aus denen die Aufgaben kommen, und auch die Reihenfolge der Themen nicht verändert werden. Notieren die Schüler ihre Antworten in einer Antwortmatrix, dann können die Stärken und Schwächen der einzelnen Schüler bezüglich der zehn vorkommenden Themen leicht abgelesen werden. Es bleibt die Aufgabe, diese Diagnose zu nutzen.
In diesem Dokument geht es darum, Aufgaben für Kopfübungen in der gymnasialen Oberstufe bereitzustellen. Die Aufgaben sind hier nach Themen geordnet. Für eine Kopfübung werden dann zehn Aufgaben aus zehn verschiedenen Themen zusammengestellt.

Themen

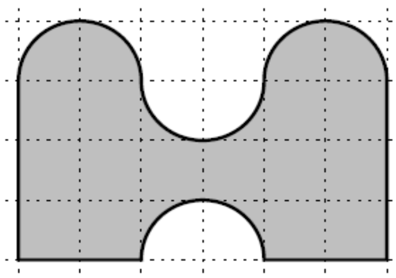
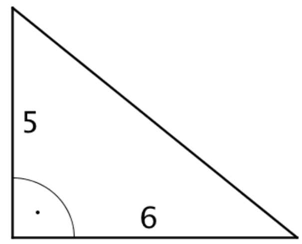
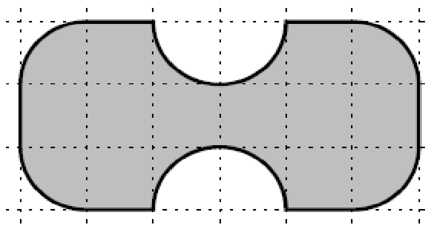
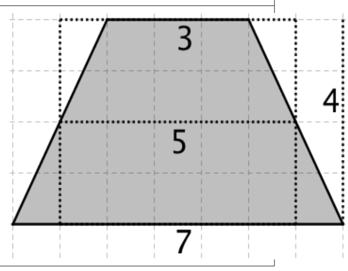
Geometrische Begriffe und Sätze....................2
Flächen- und Rauminhalte....................4
Vektorrechnung....................8
Terme aufstellen und interpretieren....................10
Termumformungen (Klammern, ...)....................12
Zufall & Statistik....................14
Gleichungen lösen....................18
Überschlagsrechnung....................20
Potenzen (Wurzeln, Potenzgesetze)....................22
Logarithmen....................24
Zahlentheorie (Teilbarkeit, ...)....................26
Grundrechenarten....................28
Bruchrechnung....................30
Prozentrechnung....................32
Funktionen verschieben, strecken, spiegeln, ...33
Trigonometrie und Winkel....................35
Funktionsuntersuchungen....................38
Wachstumsprozesse....................41

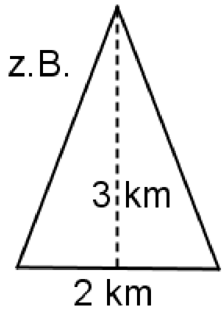
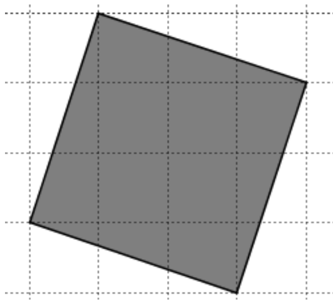
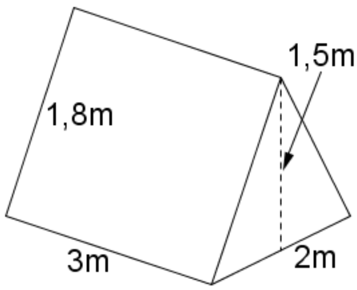
Geometrische Begriffe und Sätze

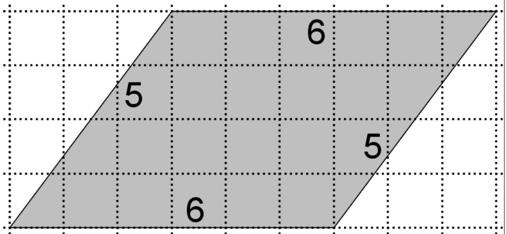
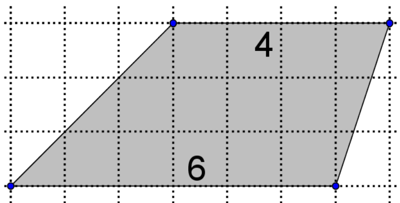
	Aufgabe	Lösung
A1	Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem Viereck?	360°
A2	Wie groß ist jeder einzelne Innenwinkel in einem regelmäßigen Sechseck?	120°
A3	Ist das Dreieck mit den Seitenlängen 6cm , 8cm und 10cm rechtwinklig?	Ja.
A4	Gib die Länge der Diagonalen eines Quadrats mit Kantenlänge a an.	$\sqrt{2} \cdot a$
A5	Über einer Grundseite g werden verschiedene rechtwinklige Dreiecke gezeichnet. Wo liegen die Spitzen all dieser Dreiecke?	auf dem Thaleskreis
A6	Wie groß ist die Summe der Außenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks?	900°
A7	Wie groß ist die Winkelsumme im 5-Eck?	540°
E1	Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind 3m und 4m lang. Wie lang ist die Hypotenuse?	5m
E2	Sind zwei Dreiecke mit den gleichen Seitenlängen kongruent?	Ja.
E3	Skizziere zwei Dreiecke, die ähnlich aber nicht kongruent sind.	

E4	Skizziere ein gleichschenkliges Dreieck.	
E5	Sind zwei Parallelogramme mit den gleichen Seitenlängen kongruent?	Nein.
E6	Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden in einem Dreieck?	Schwer- punkt
E7	Wie erhält man bei einem Dreieck den Mittelpunkt des Umkreises?	Schnittpunkt der Mittel- senkrechten
C1	Sind zwei Rechtecke kongruent, wenn sie die gleichen Seitenlängen haben.	Ja.
C2	Die Kanten eines Quadrates sind 5cm lang. Wie lang ist die Diagonale ungefähr?	etwas länger als 7cm
C3	Sind zwei Dreiecke kongruent, wenn sie die gleichen Winkel haben.	Nein.
C4	Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden?	Inkreis- mittelpunkt
C5	In einem gleichseitigen Dreieck ABC ist die Seite AB gleichzeitig Durchmesser eines Kreises. Liegt C in diesem Kreis?	Nein.
C6	Ein Viereck, in dem zwei Seiten parallel zueinander sind, heißt ...	Trapez
C7	In einem Parallelogramm ist ein Winkel 36° groß. Wie groß sind die restlichen drei Winkel?	36° 54° 54°

Flächen- und Rauminhalte

	Aufgabe	Lösung
E1	Berechne die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 6m und 8m und der Hypotenuse 10m.	$24m^2$
E2	Berechne die Größe der gefärbten Fläche. 1 Kästchen = $1cm^2$ 	$18cm^2$
E3	Skizziere ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt 15.	
E4	Gib mögliche Abmessungen für einen Kanister mit 4 Litern Milch an.	1dm, 2dm, 2dm
E5	Berechne die Größe der gefärbten Fläche. 1 Kästchen = $1cm^2$ 	$14cm^2$
E6	Skizziere ein Trapez mit dem Flächeninhalt 20 .	

E7	Eine kleine Kugel hat das Volumen $7\,cm^2$. Welches Volumen hat eine Kugel mit doppelt so großem Radius?	$8 \cdot 7\,cm^2$ $= 56\,cm^2$
B1	Skizziere ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt $3\,km^2$.	
B2	Stimmt das? »Der Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser 4m ist ungefähr $50m^2$.«	Nein. Der Radius ist 2m.
B3	Berechne die gefärbte Fläche. 1 Kästchen ist $1cm^2$ groß. 	$10cm^2$
B4	Wie groß ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Kantenlängen $7\,cm$ und $4\,cm$?	zwischen $0\,cm^2$ und $28\,cm^2$
B5	Wie viel Luft ist in dem skizzierten Zelt? 	$4{,}5\,m^3$ bzw. 4500 Liter
B6	Welche Kantenlänge hat ein Würfel mit dem Volumen $125\,mm^3$?	$5\,mm$

B7	Ist das Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche $10m^2$ und Höhe 4m kleiner, größer oder gleich $20m^3$?	kleiner $\frac{1}{3} \cdot 10\,m^2 \cdot 4\,m$
F1	In einem gleichschenkligen Dreieck mit Flächeninhalt $6\,dm^2$ ist die Basis $6\,dm$ lang. Wie hoch ist das Dreieck?	$2\,dm$
F2	Berechne den Flächeninhalt. 1 Kästchen entspricht $1\,cm^2$ 	$A = g \cdot h$ $= 6 \cdot 4 = 24$
F3	Wie viele Eisenkugeln mit $1\,cm$ Durchmesser sind genauso schwer, wie eine Eisenkugel mit $3\,cm$ Durchmesser?	27
F4	Ein kleiner Kreis hat einen Flächeninhalt von $9cm^2$. Welche Fläche hat ein Kreis mit doppelt so großem Radius?	$4 \cdot 9\,cm^2$ $= 36\,cm^2$
F5	Aus einer Spanplatte werden Holzscheiben ausgesägt. Wie viele Scheiben mit Radius $2\,dm$ sind etwa so schwer wie eine Scheibe mit Radius $6\,dm$?	9
F6	Berechne den Flächeninhalt des Trapezes. 1 Kästchen entspricht $1\,cm^2$ 	$A = \frac{6+4}{2} \cdot 3$ $= 15$
F7	Stimmt das? »Um ein DIN A4-Blatt mit dem Kopierer auf DIN A3 zu vergrößern, muss man den Vergrößerungsfaktor 2 einstellen.«	Nein. Fläche wird verdoppelt, Kanten aber nicht.

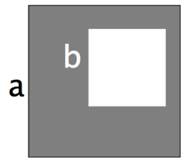
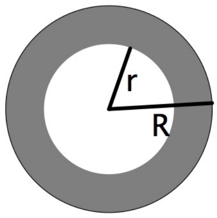
Vektorrechnung

	Aufgabe	Lösung
C1	Bestimme die Länge des Vektors $\begin{pmatrix}6\\0\\8\end{pmatrix}$.	10
C2	Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}7\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}$ orthogonal?	Ja. (Skalarprodukt ergibt Null.)
C3	Bestimme x so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}x\\6\end{pmatrix}$ orthogonal sind.	$x=-10$
C4	Gib einen Vektor an, der eine Richtung senkrecht zu $\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ beschreibt.	z.B. $\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$
C5	Ist der Vektor $\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$ länger als $\begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}$?	Nein.
C6	Was ist an der folgenden Ebenengleichung nicht korrekt? $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-12\\8\\-20\end{pmatrix}$	Richtungs-vektoren sind linear abhängig

C7	Gib einen Vektor an, der orthogonal zu $\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ ist.	z.B. $\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$
F1	Bestimme die Länge des Vektors $\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$.	5
F2	Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\5\\-6\end{pmatrix}$ parallel?	Nein.
F3	Für welchen Wert von a sind die Vektoren $\begin{pmatrix}a\\5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}$ orthogonal?	$a=-5$
F4	Gib einen Vektor an, der eine Richtung senkrecht zu $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ beschreibt.	z.B. $\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$
F5	Welcher Vektor ist länger: $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix}$?	Beide sind gleich lang.
F6	Gib einen Vektor senkrecht zur folgenden Ebene an. $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-5\\-7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$	z.B. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
F7	Gib einen Vektor an, der orthogonal zu $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ ist.	z.B. $\begin{pmatrix}-q\\p\end{pmatrix}$

Terme aufstellen und interpretieren

	Aufgabe	Lösung
E1	Gib einen Term für die Oberfläche einer Kugel an.	$4\pi r^2$
E2	Gib als Term an: Das Fünffache der um 7 verminderten Zahl x.	$5\cdot(x-7)$
E3	Gib die Formel für den Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a , b und c an.	$a+b+c$
E4	Die Seitenlängen eines Rechtecks unterscheiden sich um 3cm. Die längere Seite wird mit b bezeichnet. Gib einen Term für die Fläche an.	$b\cdot(b-3)$
E5	Gib einen Term für die Oberfläche eines Würfels an.	$6a^2$
E6	Gib einen Term für das Volumen eines Zylinders an.	$\pi\cdot r^2\cdot h$
E7	Gib einen Term für den Flächeninhalt eines Parallelogramms an.	$g\cdot h$
B1	Gib einen Term für den Umfang eines Parallelogramms mit den Seitenlängen a und b an.	$2a+2b$
B2	Gib als Term an: Das Verhältnis aus der gesuchten Zahl und der um 5 verminderten Zahl.	$\frac{x}{x-5}$

B3	Eine Torte (Höhe h, Durchmesser d) besteht aus n Stücken. Gib einen Term für das Volumen eines Stückes an.	$\frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4 \cdot n}$
B4	Gib einen Term für die Steigung einer Geraden an, die mit der x-Achse den Winkel α einschließt.	$\tan(\alpha)$
B5	Gib einen Term für die Länge der Diagonalen eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b an.	$\sqrt{a^2+b^2}$
B6	Gib als Term an: Die Summe der Kehrwerte einer natürlichen Zahl und ihres Nachfolgers.	$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$
B7	Gib als Term an: Die Differenz aus einer Zahl a und ihrem Kehrwert.	$a-\frac{1}{a}$
	Skizziere eine Fläche mit dem Flächeninhalt a^2-b^2.	
	Gib einen Term für die graue Fläche an. 	$\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$

Termumformungen (Klammern, ...)

	Aufgabe	Lösung
A1	Faktorisiere $3a^2-6a$.	$3a\cdot(a-2)$
A2	Löse die Klammern auf: $(x+2)\cdot(x+5)$	$x^2+7x+10$
A3	Klammere aus: $42\mathrm{yz}-9\mathrm{y}$	$3\mathrm{y}\cdot(14\mathrm{z}-3)$
A4	Vereinfache $(a+b)^2-(a-b)^2$.	$4ab$
A5	Faktorisiere $17z^3+51z^2$.	$17z^2(z+3)$
A6	Multipliziere aus: $(3x-1)^2$	$9x^2-6x+1$
A7	Multipliziere aus: $(4x+5y)\cdot(5y-4x)$	$25y^2-16x^2$
E1	Multipliziere aus: $(2a-b)\cdot(a+2b)$	$2a^2+3ab-2b^2$
E2	Löse die Klammern auf: $(3n-7m)^2$	$9n^2-42nm$ $+49m^2$
E3	Vereinfache $x-(1-(1-x)+1)$.	-1
E4	Vereinfache $(a+b)^2+(a-b)^2$.	$2a^2+2b^2$
E5	Vereinfache $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{4}{x}}$.	$\dfrac{x}{5}$
E6	Faktorisiere $u^2-18u+81$.	$(u-9)^2$
E7	Vereinfache $\dfrac{p^2-q^2}{p-q}$.	$p+q$
B1	Ergänze: $(5a+...)^2=25a^2+30a+...$	$3;9$
B2	Schreibe als Produkt: $9+3r+\dfrac{r^2}{4}$	$\left(3+\dfrac{r}{2}\right)^2$

B3	Ergänze: $(4r-...)^2=16r^2-48rb+...$	$6b\,;36b^2$
B4	Schreibe ohne Klammern: $2\cdot(0{,}5k-6m)^2$	$\frac{1}{2}k^2-12km$ $+72m^2$
B5	Faktorisiere $6yz-9xz$.	$3z\cdot(2y-3x)$
B6	Faktorisiere $16u^4-25v^2$.	$(4u^2+5v)$ $\cdot(4u^2-5v)$
B7	Schreibe $(-4)\cdot(6-0{,}4c)$ ohne Klammern.	$-24+1{,}6c$
F1	Schreibe ohne Klammern: $-2\cdot(5x-7)$	$-10x+14$
F2	Schreibe als Summe: $\frac{6n+15m}{6}$	$n+\frac{5}{2}\cdot m$
F3	Vereinfache: $-(1-(1-a))$	$-a$
F4	Faktorisiere $21uv-15u^2$.	$3u\cdot(7v-5u)$
F5	Vereinfache $\frac{4c^2-d^2}{2c+d}$.	$2c-d$
F6	Multipliziere aus: $(x-4)\cdot(5-x)$	$x-x^2-20$
F7	Ergänze Klammern, so dass die Gleichung stimmt: $3-4+5-6\ =\ 0$	$3-(4+5-6)$

Zufall & Statistik

	Aufgabe	Lösung
A1	Jemand würfelt mit zwei Würfeln gleichzeitig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine 1 und eine 2 zu würfeln?	$\frac{1}{18}$
A2	Zweimal nacheinander wird eine Münze geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Wurf Kopf ergibt?	$\frac{1}{4}$
A3	Vier Schüler werden in zwei Zweiergruppen eingeteilt. Wie viele mögliche Aufteilungen gibt es?	3
A4	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Familie mit drei Kindern alle drei Jungen sind?	ca. $\frac{1}{8}$
A5	Bestimme den Mittelwert der Zahlen 2, 4, 6, 7 und 11.	6
A6	Bestimme den Median (Zentralwert) der Zahlen 2, 45, 9, 5 und 4.	5
A7	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Familie mit zwei Kindern beide das gleiche Geschlecht haben?	$\frac{1}{2}$
E1	Jemand würfelt zweimal hintereinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Zahl größer ist als die erste?	$\frac{5}{12}$
E2	Wie viele Möglichkeiten gibt es, von vier Büchern zwei auszuwählen?	$\frac{4\cdot 3}{2}=6$

E3	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln spätestens im zweiten Wurf eine Sechs zu würfeln?	$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$
E4	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Adalbert und Beate am gleichen Tag Geburtstag haben?	$\frac{1}{365}$
E5	Berechne $\binom{7}{6}$.	7
E6	Bestimme den Mittelwert der Zahlen 4, 4, 5, 10, 11 und 11.	7,5
E7	Eine Münze wird 100 Mal nacheinander geworfen. Wie oft ist fünfmal in Folge Zahl zu erwarten?	$\frac{1}{2^5}\cdot 96=3$
C1	Der Mittelwert der Zahlen 9, 5, 14, 10 und ... ist 10. Ergänze die fehlende Zahl.	12
C2	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Heiligabend auf einen Dienstag und Silvester auf einen Freitag fällt?	0 (immer am gleichen Wochentag)
C3	Vier Münzen fallen auf den Tisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei allen die Zahl oben liegt?	$\frac{1}{16}$
C4	Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 5 Dingen genau 4 auszuwählen?	5
C5	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Familie mit vier Kindern immer abwechselnd Jungen und Mädchen geboren werden?	ca. $\frac{1}{8}$

C6	Eine Gruppe besteht aus 3 Jungen und 6 Mädchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die jüngste Person männlich und die älteste weiblich ist?	$\frac{3\cdot 6}{9\cdot 8}=\frac{1}{4}$
C7	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Geschwister beide an einem Mittwoch geboren wurden?	ca. $\frac{1}{49}$
F1	Fünf DVDs werden nebeneinander in ein Regal gestellt. Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es?	$5!=120$
F2	Von fünf Büchern möchte Vera zwei mit in Urlaub nehmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?	$\frac{5\cdot 4}{2}=10$
F3	Beim Werfen von zwei Würfeln ergibt sich die Augensumme 11. Wie wahrscheinlich ist das?	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
F4	Der Mittelwert von 4; 6; 6 und 9 beträgt 6,25. Berechne den Mittelwert der Zahlen 1,4; 1,6; 1,6 und 1,9.	1,625
F5	Stimmt die Schlussfolgerung? »16-jährige Mädchen sind im Durchschnitt 1,66m groß. Die Standardabweichung beträgt 5,8cm. Also sind nur sehr wenige dieser Mädchen kleiner 1,6m.	Nein. Im Bereich von $\mu-\sigma$ bis $\mu+\sigma$ liegen nur ca. 68% der ...
F6	Der Mittelwert der Zahlen 6, 8, 9, 11 und ... ist 9. Ergänze die fehlende Zahl.	11

F7	Ist die Wahrscheinlichkeit für sechsmal "Zahl" hintereinander beim Münzwurf größer als 1% ?	Ja. $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

Gleichungen lösen

	Aufgabe	Lösung
E1	Löse die Gleichung $3x+6=0$.	$x=-2$
E2	Gib alle Lösungen der Gleichung $x^2-x=0$ an	$x=0, x=1$
E3	Löse die Gleichung $0{,}5\cdot x-5=2$.	$x=14$
E4	Löse die Gleichung $3\cdot x^2-17=-5$.	$x=\pm 2$
E5	Gib alle Lösungen der Gleichung $a^2+a=0$ an	$a=0$ $a=-1$
E6	Löse die Gleichung $5\cdot x^2+6=4$.	keine Lösungen
E7	Löse die Gleichung $0{,}1\cdot 3^x=8{,}1$.	$x=4$
B1	Löse die Gleichung $5x+17=2$.	$x=-3$
B2	Gib alle Lösungen der Gleichung $x^2+4=0$ an.	keine Lösungen
B3	Löse die Gleichung $(x-2)\cdot(4-x)=0$.	$x=2, x=4$
B4	Löse die Gleichung $5^x=\frac{1}{25}$.	$x=-2$
B5	Löse die Gleichung $5\cdot 2^t=\frac{5}{8}$.	$t=-3$
B6	Gib alle Lösungen der Gleichung $x^2-2\mathrm{x}+1=0$ an.	$x=1$
B7	Löse die Gleichung $(x-2)\cdot(x+2)+4=0$.	$x=0$

C1	Löse die Gleichung $3\cdot n-15=4\cdot n+1$.	$n=-16$
C2	Gib eine Gleichung mit den Lösungen $t=3$ und $t=-5$ an.	z.B. $(t-3)\cdot(t+5)=0$
C3	Gib alle Lösungen der Gleichung $x^3-2=25$ an.	$x=3$
C4	Gib die Lösungen der Gleichung $3^t+7=8$ an.	$t=0$
C5	Ergänze: Die Gleichung $\_\_\_\_\cdot x+6=0$ hat die Lösung $x=18$.	$-\frac{1}{3}$
C6	Gib alle Lösungen der Gleichung $u^2=u^4$ an.	$u=0$, $u=\pm 1$
C7	Löse die Gleichung $4\cdot 4^z=\frac{1}{16}$.	$z=-3$

Überschlagsrechnung

	Aufgabe	Lösung
A1	Berechne näherungsweise $348\,cm \cdot 4{,}1\,m$.	ca. $14\,m^2$
A2	Wie alt sind alle Schüler der Schule zusammen?	
A3	Wie groß ist das Volumen dieses Raumes?	
A4	Wie viele Kästchen sind ungefähr auf einer beidseitig bedruckten DIN A4-Seite Karopapier?	ca. 4800
A5	Wie weit kommt man in zweieinhalb Stunden, wenn man auf der Autobahn $130\,km/h$ fährt?	325 km
A6	Wie viel verdient jemand mit einem Lohn von 12 Euro pro Stunde und 4 Arbeitsstunden wöchentlich ungefähr pro Monat?	ca. 200 Euro
A7	Berechne näherungsweise $24{,}8 \cdot 7{,}1$.	175
E1	Berechne näherungsweise den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius $7\,m$.	$150\,m^2$
E2	Berechne näherungsweise $\log_{10}(978)$.	ca. 3
E3	Berechne näherungsweise $\sqrt{120}$.	ca. 11
E4	Wie viele Minuten hat ein Monat ungefähr?	ca. 45000
E5	Berechne näherungsweise $\log_2(100)$.	ca. 6,5
E6	Überschlage 10,34 + 2 + 0,08 + 17,82 .	ca. 30

E7	Wie viel Umsatz macht die Cafeteria ungefähr an einem Schultag?	

Potenzen (Wurzeln, Potenzgesetze)

	Aufgabe	Lösung
A1	Berechne $\sqrt{2^8}$.	$2^4=16$
A2	Ist die Gleichung $\sqrt{49+51}=\sqrt{49}+\sqrt{51}$ wahr oder falsch?	Falsch.
A3	Berechne $\left(\sqrt{6}\right)^4$.	36
A4	Fasse zusammen: $x^6+x^3+x^3$	x^6+2x^3
A5	Vereinfache: $x^0+5^0+0^2$	2
A6	Berechne $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$	$\sqrt{36}=6$
A7	Vereinfache $\sqrt{5a^2}\cdot\sqrt{5}$.	$5a$
B1	Berechne $\sqrt{64}+\sqrt{36}$	$8+6=14$
B2	Schreibe ohne Wurzelzeichen: $\sqrt[3]{z}$	$z^{1/3}$
B3	Berechne $\frac{5^4\cdot 3}{15^2}$.	$\frac{25}{3}$
B4	Fasse zusammen: $2a^2+2\cdot a-a^2+a$	a^2+3a
B5	Gib den Wert für 0^0 an.	1
B6	Berechne $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{27}}$.	$\frac{\sqrt{25\cdot 3}}{\sqrt{9\cdot 3}}=\frac{5}{3}$
B7	Ist die Gleichung $\sqrt{x^y}=\left(\sqrt{x}\right)^y$ allgemein gültig?	Ja.
F1	Ist die Gleichung $\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ wahr oder falsch?	Wahr.

F2	Berechne $\frac{49\cdot 3^3}{7^3\cdot 9}$.	$\frac{3}{7}$
F3	$(\sqrt{5})^6=$	$5^3=125$
F4	$\sqrt[5]{3^{10}}=$	$3^2=9$
F5	Berechne $\frac{10\cdot 2^4}{2^5\cdot 5^2}$.	$\frac{1}{5}$
F6	Schreibe ohne Wurzelzeichen: $\sqrt{7}$	$7^{1/2}$
F7	$\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}=$	$\sqrt{36\cdot 4}=12$

Logarithmen

	Aufgabe	Lösung
E1	$\log_{10}(0{,}001)=$	-3
E2	x sei eine 17-stellige Zahl. Wie groß ist $\log_{10} x$?	$16 \leqslant y < 17$ $(y=\log_{10} x)$
E3	$\ln(\sqrt{e})=$	½
E4	$\log_5(15)-\log_5(3)=$	1
E5	Für welche Zahl z gilt $\log_{10} z=9$?	1000000000 (9 Nullen)
E6	$\log_2(24)+\log_2\left(\frac{1}{3}\right)=$	3
E7	$\log_3(36)-\log_3(4)=$	2
B1	$\log_3(27)=$	3
B2	Für welche Zahl b gilt $\log_b 81=4$?	3
B3	$\log_{10}(0{,}01)=$	-2
B4	$\log_7(1)=$	0
B5	z sei eine vierstellige Zahl. Wie groß ist $\log_{10}(z)$?	$3 \leqslant z < 4$
B6	$\log_2(20)-\log_2(5)=$	$\log_2\left(\frac{20}{5}\right)=2$
B7	$\log_3(18)+\log_3(0{,}5)=$	$\log_3(9)=2$
	$\log_2(8^k)=$	$3\cdot k$

Zahlentheorie (Teilbarkeit, ...)

	Aufgabe	Lösung
A1	Ist 100010 durch drei teilbar?	Nein.
A2	Ist 548710 durch vier teilbar?	Nein.
A3	Gib die nächsten beiden Zahlen der Folge an: 1, 4, 9, 16, 25, ...	36, 49, ...
A4	Ist 1002 durch 6 teilbar?	Ja.
A5	Gib die nächsten beiden Zahlen der Folge an: 1, 3, 9, 27, ...	81, 243, ...
A6	Gib das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von 34 und 51 an.	$6 \cdot 17 = 102$
A7	Gib den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von 17 und 160 an.	1
F1	Gib den größten gemeinsamen Teiler von 16 und 100 an.	4
F2	Nenne drei Primzahlen.	2, 3, 5, 7, 11, ...
F3	Gib die nächsten beiden Zahlen der Folge an: 2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, ...	65, 74, ...
F4	Ist 587360 durch 4 teilbar?	Ja.
F5	Ist 1251 durch 3 teilbar?	Ja.
F6	Gib die nächsten beiden Zahlen der Folge an: 1, 4, 7, 10, ...	13, 16, ...
F7	Gib das kleinste gemeinsame Vielfache von 26 und 65 an.	$2 \cdot 5 \cdot 13 = 130$

Grundrechenarten

	Aufgabe	Lösung
A1	$99 \cdot 101 =$	9999
A2	$127+64+73 =$	264
A3	$5700/20+300/20 =$	300
A4	$14/0{,}007 =$	2000
A5	$(-13) \cdot 4=$	-52
A6	$-19-9=$	-28
A7	$23 \cdot 7 =$	161
B1	$17 \cdot 13 =$	221
B2	$84/1{,}2 =$	70
B3	$98 \cdot 14 =$	1372
B4	$1+2+3+4+5+\cdots+19 =$	190
B5	$19 \cdot 8+8 \cdot 80 =$	$99 \cdot 8=792$
B6	$(132 \cdot 17/11)/17 =$	12
B7	$91 \cdot 67-57 \cdot 91 =$	910
C1	$(-17) \cdot (-3)=$	51
C2	$198 \cdot 202 =$	39996
C3	$-17+3$	-14
C4	$(-78)/(-6)=$	13
C5	$121/(-10)=$	$-12{,}1$
C6	$1001/7 =$	143
C7	Welche Zahl ist größer: -134 oder -1 ?	-1

F1	$4381+1234+619=$	6234
F2	$1210/0{,}11=$	11000
F3	$-17-7-(10-9)=$	-25
F4	$53\cdot 17+33\cdot 53=$	2650
F5	$102-57+13-8=$	50
F6	$-(-45)\cdot(-0{,}4)=$	-18
F7	$(-87)/3=$	-29

Bruchrechnung

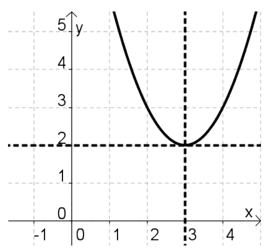
	Aufgabe	Lösung
B1	$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$	$\frac{7}{12}$
B2	$\frac{4}{56}\cdot\frac{49}{8}=$	$\frac{7}{16}$
B3	$\frac{1}{8}-\frac{1}{7}=$	$-\frac{1}{56}$
B4	$\frac{34}{9}\div\frac{17}{27}=$	6
B5	Welche Zahl ist größer: $\frac{1}{49}$ oder $\frac{1}{52}$?	$\frac{1}{49}$
B6	Welche Zahl ist größer: $\frac{6}{7}$ oder $\frac{7}{8}$?	$\frac{7}{8}$
B7	$\frac{5}{2}+\frac{2}{5}=$	$\frac{29}{10}=2{,}9$
C1	$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=$	$\frac{1}{2}$
C2	Wandle $\frac{3}{8}$ in eine Dezimalzahl um.	0,375
C3	Welche Zahl ist größer: $-\frac{2}{4}$ oder $-\frac{2}{5}$?	$-\frac{2}{5}$
C4	$\frac{12}{10}\div\frac{6}{25}=$	5

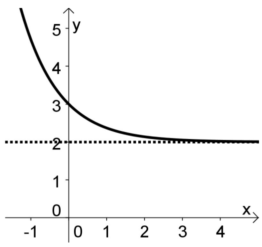
C5	Wandle 0,15 in einen Bruch um.	$\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$
C6	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=$	$\frac{5}{6}$
C7	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{75}{76}\cdot\frac{76}{77}=$	$\frac{1}{77}$
F1	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=$	$\frac{1}{2}$
F2	$\frac{3}{7}\div 2=$	$\frac{3}{14}$
F3	Wandle $\frac{3}{5}$ in eine Dezimalzahl um.	0,6
F4	$\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=$	$\frac{1}{10}$
F5	$\frac{7}{8}\cdot x=\frac{1}{6}$ Berechne x .	$x=\frac{4}{21}$
F6	Gib zwei Brüche an, die größer als $\frac{1}{2}$ und kleiner als $\frac{3}{4}$ sind.	z.B. $\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\ldots$
F7	$\frac{1}{5}+a=\frac{1}{2}$ Berechne a .	$a=\frac{3}{10}$

Prozentrechnung

	Aufgabe	Lösung
C1	Wieviel sind 5% von 17 Euro?	85 Cent
C2	Der Preis von 110 Euro wird um 10% gesenkt. Gib den neuen Preis an.	99 Euro
C3	Um wieviel Prozent wurde der Preis gesenkt? ~~125 €~~ jetzt 100 €	20%
C4	Es gibt 4% Rabatt. Das sind 48 Euro. Gib den ursprünglichen Preis an.	1200 Euro
C5	Eine Ware wird erst um 20% reduziert und dann noch einmal um 30%. Kostet die Ware jetzt halb so viel wie vorher?	Nein.
C6	Wieviel sind 13% von 50 Euro?	6,50 Euro
C7	Der Preis von 95 Euro wird um 2% erhöht. Gib den neuen Preis an.	96,90 Euro

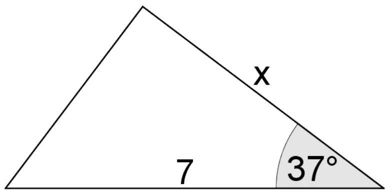
Funktionen verschieben, strecken, spiegeln, ...

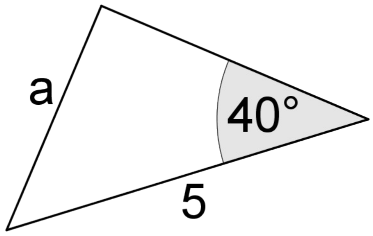
	Aufgabe	Lösung
A1	Gib die Gleichung einer nach oben geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt $S(0\|3)$ an.	z.B. $y=x^2+3$
A2	Gib die Gleichung einer nach unten geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt $S(0\|2)$ an.	z.B. $y=-x^2+2$
A3	Wie unterscheidet sich die Funktion $f(x)=\sin(x+5)$ von der normalen Sinusfunktion.	f ist um 5 nach links verschoben
A4	Die Funktion $f(x)=2^x+x^2$ soll an der y -Achse gespiegelt werden. Gib den Term der gespiegelten Funktion an.	$2^{-x}+x^2$
A5	Gib den Funktionsterm der um 7 nach rechts verschobenen Kosinusfunktion an.	$\cos(x-7)$
A6	Die Funktion $f(x)=\sin(2\cdot(x-4))$ ist durch Verschieben um 4 Einheiten und Strecken aus $\sin(x)$ entstanden. Wurde zuerst verschoben oder gestreckt?	zuerst gestreckt
A7	Skizziere den Graphen von $f(x)=(x-3)^2+2$.	
C1	Gib den Funktionsterm der um 4 nach unten und 3 nach rechts verschobenen	$(x-3)^2-4$

	Normalparabel an.	
C2	Die Normalparabel wird zuerst um 9 nach unten verschoben und dann mit dem Faktor 2 in y -Richtung gestreckt. Wo liegen die Nullstellen der neuen Funktion?	bei $x=\pm 3$
C3	Die Winkelhalbierende $y=x$ wird mit dem Faktor 3 in x- und in y-Richtung gestreckt. Gib die neue Gleichung an.	$y=x$
C4	Durch welche Verschiebung erhält man die Funktion $f(x)=\sin(x+4)$ aus der Sinusfunktion?	$\sin$ um 4 nach links verschieben
C5	Adam verschiebt die Funktion $f(x)=2^x$ um eine Einheit nach links. Eva streckt f mit dem Streckfaktor 2. Wie unterscheiden sich die beiden Ergebnisse?	gar nicht
C6	Die Funktion $f(x)=2\cdot x$ wird erst mit dem Faktor 3 in y-Richtung und dann mit dem Faktor 4 in x-Richtung gestreckt. Gib die neue Funktionsgleichung an.	$f(x)=\frac{3}{2}x$ $\left(=\frac{2\cdot 3}{4}x\right)$
C7	Skizziere den Graphen von $f(x)=e^{-x}+2$.	

Trigonometrie und Winkel

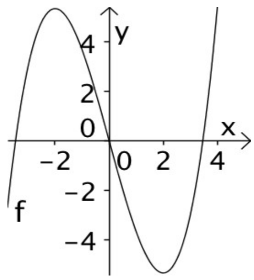
	Aufgabe	Lösung
E1	Nenne 3 Nullstellen der Sinusfunktion.	$\pi \cdot k$ für $k \in \mathbb{Z}$
E2	Gib die Winkelgröße 90° im Bogenmaß an.	$\frac{\pi}{2}$
E3	$\sin(30°)=$	0,5
E4	Gib die Winkelgröße 45° im Bogenmaß an.	$\frac{\pi}{4}$
E5	$\tan(45°)=$	1
E6	Gib einen Zusammenhang zwischen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$ an.	$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
E7	Gib die Winkelgröße 60° im Bogenmaß an.	$\frac{\pi}{3}$
B1	Nenne ein Maximum der Funktion $f(x)=\cos(x)$.	$y=1$ $x\in\{0;2\pi;...\}$
B2	Gib die Winkelgröße 180° im Bogenmaß an.	π
B3	Gib die Winkelgröße $\frac{\pi}{2}$ im Gradmaß an.	90°
B4	Berechne $\sin(45°)^2+\cos(45°)^2$.	1
B5	Gib eine Stelle auf der x -Achse an, wo sich Sinus- und Kosinusfunktion schneiden.	z.B. $x=\frac{\pi}{4}$

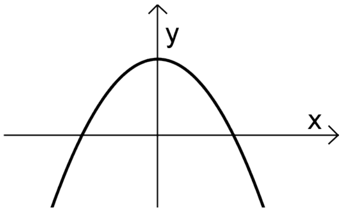
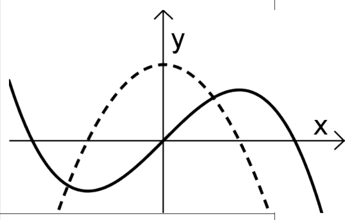
B6	Gib die Winkelgröße $\frac{\pi}{3}$ im Gradmaß an.	60°
B7	$\tan(90°)=$	nicht definiert
C1	Gib den Zusammenhang zwischen dem Gradmaß α und dem Bogenmaß x eines Winkels an.	z.B. $\frac{\alpha}{360°}=\frac{x}{2\cdot\pi}$
C2	$\sin(90°)=$	1
C3	Der Sinus eines Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis von … zu Hypotenuse.	Gegen-kathete
C4	Die Funktion $f(x)=\sin(\pi\cdot x)$ ist periodisch. Gib die Periodenlänge an.	2
C5	$\cos(0°)=$	1
C6	Gib den Term einer Funktion mit der Periodenlänge 1 an.	z.B. $\cos(2\cdot\pi\cdot x)$
C7	$\sin(\pi)=$	0
F1	$\cos(60°)=$	0,5
F2	Gib einen Term für die Seite x an. 	$7\cdot\cos(37°)$
F3	$\sin(\pi/2)=$	1
F4	Der Cosinus eines Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis von … zu Hypotenuse.	Gegen-kathete
F5	Gib die Winkelgröße 30° im Gradmaß an.	$\pi/6$
F6	$\sin(0°)=$	0

F7	Gib einen Term für die Seite a an. 	$5 \cdot \sin(40°)$

Funktionsuntersuchungen

	Aufgabe	Lösung
A1	Leite die Funktion $f(x)=3\cdot x-7$ ab.	$f'(x)=3$
A2	Steigt oder fällt die Funktion $f(x)=x^4-2\mathrm{x}^3$ an der Stelle $x=1$?	$f'(1)=-2$ f fällt
A3	Leite nach x ab: $2\cdot\sin(x+5)$.	$2\cdot\cos(x+5)$
A4	Leite nach x ab: $\cos(2\cdot x)$.	$-2\cdot\sin(2\mathrm{x})$
A5	Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x)=(x-2)\cdot(x+7)\cdot(x-4)$.	$2;-7;4$
A6	Wie viele Extremstellen hat die Funktion $f(x)=(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)$?	2
A7	Berechne die vierte Ableitung von $f(x)=x^3-4x^2+19x-14{,}9$.	$f^{(4)}(x)=0$
B1	Berechne die dritte Ableitung von $f(x)=x^3-17\cdot x$.	$f^{(3)}(x)=6$
B2	Leite nach x ab: $\frac{2\cdot\pi}{x}$.	$-\frac{2\cdot\pi}{x^2}$
B3	Der Scheitelpunkt der Parabel $f(x)=x^2-4\mathrm{x}+7$ ist $S(2\|3)$. Wie viele Nullstellen hat die Parabel?	keine Nullstellen
B4	Ist eine Funktion f mit negativer zweiter Ableitung links- oder rechtsgekrümmt?	rechts-gekrümmt
B5	Die Funktion $f(x)=x^3-3\cdot x+4$ hat in $T(1\|2)$ einen Tiefpunkt. Wie viele	eine Nullstelle

	Nullstellen hat die Funktion?	
B6	Skizziere eine Funktion, deren Ableitung durch $f'(x)=x^2-4$ gegeben ist. (Es gibt viele solcher Funktionen.)	
B7	Berechne die Ableitung der Funktion $f(x)=3\cdot\sin(x)+\cos(3\cdot x)$.	$3\cdot\cos(x)$ $-3\cdot\sin(3\cdot x)$
C1	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=$	0
C2	Berechne das Integral über die Funktion $\sin(x)$ im Intervall $-2\cdot\pi$ bis $2\cdot\pi$.	0
C3	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=$	0
C4	$\lim\limits_{x\to+\infty} 20\cdot(3-e^{-x})=$	60
C5	Leite nach x ab: $2\cdot e^{3\cdot x+5}$.	$6\cdot e^{3\cdot x+5}$
C6	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x}=$	0
C7	Wie viele Nullstellen hat die Funktion $f(x)=e^x-2$?	1
F1	Bestimme eine Stammfunktion von $f(x)=3\cdot x^2+10\cdot x$.	z.B. $F(x)=$ $x^3+5\cdot x^2$
F2	Wie viele Extremstellen kann die Funktion $f(x)=x^4-5\cdot x^2$ höchstens besitzen?	3 Grad von f'
F3	Überprüfe die Rechnung. $\int 6\cdot\sin(2\cdot x+\pi)\,dx=-3\cdot\cos(2\cdot x+\pi)+c$	Alles ist korrekt.

F4	Berechne $\int_{-2}^{2} 2\cdot a+1\,dx$.	$8\cdot a+4$ Integrand ist konstant
F5	Gib alle Nullstellen der Funktion $g(x)=e^{2\cdot x}+e^{-x}$ an.	keine Nullstellen
F6	Skizziere den Verlauf einer Stammfunktion. 	
F7	Berechne $\int_{0}^{2} e^{x}\,dx$.	$e^{2}-1$

Wachstumsprozesse

	Aufgabe	Lösung
A1	200 € werden jährlich mit 5% verzinst. Wieviel ist nach 2 Jahren auf dem Konto?	220,50 €
A2	Die Halbwertszeit einer radioaktiven Substanz beträgt eine Woche. Wann ist nur noch etwa ein tausendstel der Substanz vorhanden?	Nach ca. 10 Wochen.
A3	Wenn man die Kantenlänge eines Würfels verdoppelt, mit welchem Faktor vervielfacht sich dann das Volumen?	$2^3=8$
A4	Wenn man die Kantenlänge eines Würfels verdoppelt, wie verändert sich dann die Oberfläche?	Die neue Oberfläche ist viermal so groß.
A5	Drei Kreise haben die Radien 2, 2 und 3. Ist die Fläche des großen Kreises größer als die der beiden kleinen Kreise zusammen?	Ja.
A6	Eine große Kugel hat ein tausendmal größeres Volumen als eine kleine Kugel. In welchem Verhältnis stehen die Radien?	$1:10$
A7	Eine Bakterienart verdoppelt sich alle 20 Minuten. Aus anfänglich 1000 Bakterien sind nach zwei Stunden .... geworden.	64000

E1	Eine Packung Eis aus dem Gefrierfach wird auf den Küchentisch gestellt. Mit welchem Modell kann die Temperatur der Packung beschrieben werden?	begrenztes Wachstum
E2	Eine Algenart verdoppelt sich alle 2 Tage. Aus anfänglich $3\mathrm{m}^2$ sind nach zehn Tagen .... geworden.	$3\mathrm{m}^2 \cdot 2^5$ $= 96\mathrm{m}^2$
E3	Anfänglich 90°C heißer Tee kühlt sich in einer 30°C warmen Küche im Laufe einer Stunde auf 60°C ab. Wie heiß ist der Tee nach insgesamt zwei Stunden?	45°C
E4	1000 € werden jährlich mit 3% verzinst. Wieviel ist nach 2 Jahren auf dem Konto?	1060,90 €
E5	Wenn der Durchmesser eines Gasplaneten sich um einen Kilometer vergrößert, wie ändert sich dann der Umfang?	vergrößert sich um 3 km (genau: π)
E6	Der radioaktive Zerfall einer Substanz wird durch $80\mathrm{g} \cdot 0{,}1^t$ (Zeit *t* in Jahren) beschrieben. Wann sind nur noch ca. 8 mg der Substanz vorhanden?	nach 4 Jahren
E7	Ein Kapital K_0 wird mit p Prozent jährlich verzinst. Gib einen Term für den Kontostand nach x Jahren an.	$K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$

Formatvorlagen

Für etwa sechs aufeinanderfolgende Kopfübungen werden zehn Themen gewählt. In jeder Kopfübung kommt zu jedem dieser Themen eine Aufgabe vor. Dabei ändert sich die Reihenfolge der Themen nicht, damit in der Antwortmatrix der Schülerinnen und Schüler die Aufgaben zu einem Thema in einer Zeile hintereinander stehen und so die Auswertung der individuellen Stärken und Schwächen erleichtert wird.

Die folgende Seite enthält eine Formatvorlage, in die man einzelne Aufgaben und Lösungen hineinkopieren und die Folie dann ausdrucken kann.
Bei der Durchführung der Kopfübung im Unterricht werden die Lösungen zunächst abgedeckt. Später können die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse mit den Lösungen vergleichen.

Kopfübungen für die Oberstufe

Nr.	Aufgabe	Lösung
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Gedanken

- manche Themen eher "mathematische Allgemeinbildung" (z.B. Zahlentheorie), manche direkt für das Abitur relevant, manche eher Knobelaufgaben zur Motivation (erfüllen die ihre Funktion?)
- Querformat besser für lange Antwortterme, aber ungünstig für Zeichnungen, Vektoren, etc.