Zwei Beweise für die Irrationalität von $\sqrt{2}$

a) Der klassische Beweis nach EUKLID

Vorbemerkung: Es gilt für $p \in \mathbb{N}$: p gerade $\Leftrightarrow p^2$ gerade.
Der Beweis wird in zwei Schritten geführt:
p gerade $\Rightarrow p^2$ gerade: Ist p gerade, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $p = 2k$ und es gilt $p^2 = 4k^2$. Also ist auch p^2 gerade.
p^2 gerade $\Rightarrow$ p gerade: Wir verwenden hier die für zwei Aussagen A und B gültige Äquivalenz

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

$\neg A$ bzw. $\neg B$ bedeuten die Negation der beiden Aussagen A und B.
Ist also p ungerade, so gilt $p = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $p^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k) + 1$ ungerade. Damit ist die Vorbemerkung bewiesen.

Behauptung: Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Zum Beweis nehmen wir das Gegenteil an, d. h. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Seien weiterhin p und q teilerfremd (denn ansonsten könnte man die entsprechend gekürzten Zahlen nehmen). Dann gilt $\sqrt{2} \cdot q = p$ und $2 \cdot q^2 = p^2$. Folglich ist p^2 gerade, also ist – nach der Vorbemerkung – auch p gerade. Wir schreiben $p = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Damit folgt: $2 \cdot q^2 = p^2 = 4k^2$, also $q^2 = 2k^2$. Damit ist q^2 und damit auch q ebenfalls gerade. p und q können aber nicht beide gerade sein, da sie sonst den Teiler 2 hätten, was aber nach der Annahme nicht sein kann. Damit ist der Satz bewiesen.

b) Beweis mit Hilfe des Satzes über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

Wiederum nehmen wir $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ an. Damit gilt $\sqrt{2} \cdot q = p$ und $2 \cdot q^2 = p^2$. Nach dem Satz über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung haben dann $2 \cdot q^2$ und p^2 dieselbe Primfaktorzerlegung. Wir gehen von der Primfaktorzerlegung von p und von q aus. Dann kommt aber – aufgrund des Quadrierens – insbesondere der Primfaktor 2 in q^2 und p^2 entweder überhaupt nicht oder in gerader Anzahl vor. Folglich ist der Primfaktor 2 in $2 \cdot q^2$ in ungerader und in p^2 in gerader Anzahl vorhanden. Wegen $2 \cdot q^2 = p^2$ kann das aber nicht sein. Folglich war unsere Annahme falsch und $\sqrt{2}$ ist irrational.