REIMUND VEHLING UND GÜNTER SCHMIDT

Eine Reise durch den Würfel – Eine Objektstudie zur Förderung der Raumanschauung von der Grundschule bis zum Abitur

Würfelschnitte sind ein vielseitig bearbeitetes Thema für Geometrieaktivitäten im Hobbybereich und auch im Mathematikunterricht von der Grundschule bis zum Abitur. Sie ermöglichen viele spannende Entdeckungen und erschließen überraschende Zusammenhänge, die alle zusammen einen wesentlichen Beitrag zur Schulung der Raumanschauung leisten können.

In diesem Artikel konzentrieren wir uns auf ebene Schnitte senkrecht zur Raumdiagonalen und beobachten und untersuchen deren Gestaltänderung bei einer kontinuierlichen „Reise längs der Raumdiagonale". Begründungen vieler Eigenschaften lassen sich recht leicht und elegant mit Hilfe der Analytischen Geometrie finden, damit wird gleichzeitig die Macht der algebraischen Beschreibung geometrischer Formen demonstriert. Wir beginnen deshalb den Artikel mit der Behandlung der Würfelschnitte in der Sekundarstufe II.

Viele Einsichten und Evidenzen ergeben sich auch einfach beim Experimentieren, sie bedürfen zunächst keiner weiteren Begründung, liefern aber mit fortschreitenden mathematischen Kenntnissen die notwendigen Ideen für Beweisansätze. Der mittlere Teil des Artikels zeigt Entdeckungsmöglichkeiten in allen Altersstufen auf.

Unerwartete Verbindungen zur Kombinatorik und zur Wahrscheinlichkeitsrechnung schließen wiederum den Rahmen in Richtung der Sekundarstufe II.

1 Würfelschnitte in der SII

Abituraufgabe Bildungsstandards

In den im Oktober 2012 veröffentlichten Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife [1] findet man eine Musteraufgabe zum Sachgebiet Geometrie/ Lineare Algebra, in der die Würfelschnitte im Mittelpunkt stehen. Nach der Bestimmung der Eckpunkte des Würfels der Kantenläge 4 (**Abb. 1**) soll die Koordinatenform der Ebene L bestimmt werden, die die Punkte B,D,E enthält (L: $x_1+x_2+x_3-4=0$) und die Schnittfigur im Würfel eingezeichnet werden (**Abb. 2**) und begründet werden, dass die Raumdiagonale AG senkrecht auf der Ebene L steht. Im Weiteren wird dann die Ebenenschar L_k: $x_1+x_2+x_3-k=0$ mit $k \varepsilon$ IR vorgegeben und bestimmte Schnittfiguren zu speziellen Parametern untersucht. Dabei wird u. a. auch das regelmäßige Sechseck als Schnittfigur zu der Ebene L_k identifiziert, die durch den Mittelpunkt des Würfels geht (**Abb. 3**).

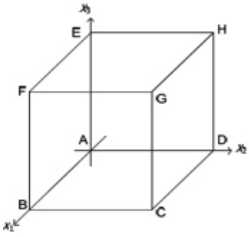


Abb. 1

Die Aufgabe wird der Leitidee „Raum und Form" zugeordnet, als wesentliche Kompetenzen werden *K2: „Probleme mathematisch lösen"* und *K3 „Mathematisch modellieren"*

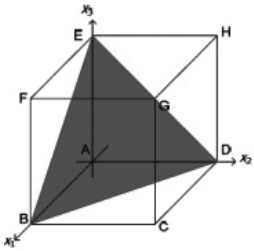


Abb. 2

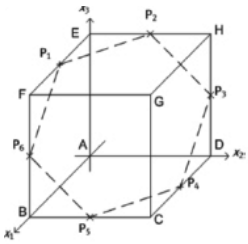


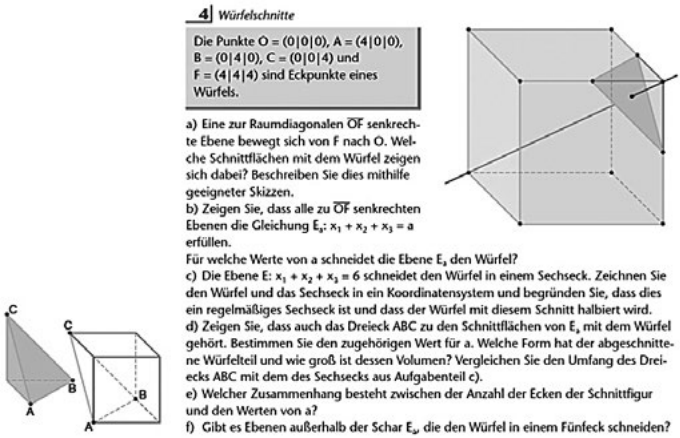
Abb. 3

genannt. Interessant sind dann auch die Anmerkungen zur Aufgabe: … *Anliegen ist es, nicht nur formalrechnerische Fertigkeiten zu prüfen, sondern auch das räumliche Vorstellungsvermögen zu testen. Viele der Teilaufgaben können sowohl auf algebraisch-analytischem Weg als auch durch geometrisch-anschauliche Überlegungen gelöst werden. Die möglichen Lösungswege der Teilaufgabe werden z. T. offen gelassen, wenngleich der algebraisch analytische Weg i. A. der einfachere ist. … Diese Aufgabe stellt die Kompetenz K2 „Probleme mathematisch lösen" in den Vordergrund. Das Verständnis der komplexen Situation mit Schnittfiguren etc. erfordert die Fähigkeit, eine Situation zu strukturieren und geeignete Strategien zur Lösung entwerfen.*

Kurze Kommentare und offene Fragen:
Ist der algebraisch analytische Weg wirklich der einfachere oder spiegelt sich darin nicht doch die in der Analytischen Geometrie einseitig reduzierte „Übungserfahrung" wider? Kompetenz K2 im Vordergrund? Ist dies in der Prüfungssituation möglich, wenn keine diesbezüglichen Erfahrungen im Unterricht vorliegen? Müsste im Abitur nicht wenigstens ein Würfelmodell als Hilfe bereit stehen? Wie komplex ist die Situation noch, wenn Würfelschnitte im vorhergehenden Unterricht der SI und SII bereits intensiv erfahren und beschrieben wurden? Wenn man die Leitidee „Raum und Form" mit der Schulung von Raumvorstellung wirklich ernst nimmt, so dürften die Würfelschnitte als „Ikone" an vielen Stellen auf ganz unterschiedlichem Niveau schon behandelt worden sein (siehe hierzu auch die Ausführungen in Teil 2 dieses Artikels).

Aus einem Lehrbuch

Die folgende Aufgabe wird in einem Lehrbuch [2] als Aufgabe zur Vorbereitung auf das Abitur angeboten. Sie kann deswegen in Teilen offener und weniger auf eine genormte Korrektur ausgerichtet sein. Insbesondere der Aufgabenteil a) bietet Möglichkeiten zu unterschiedlich ausführlichen und anschaulich-lebendigen Bearbeitungen.



4 *Würfelschnitte*

Die Punkte O = (0|0|0), A = (4|0|0), B = (0|4|0), C = (0|0|4) und F = (4|4|4) sind Eckpunkte eines Würfels.

a) Eine zur Raumdiagonalen $\overline{OF}$ senkrechte Ebene bewegt sich von F nach O. Welche Schnittflächen mit dem Würfel zeigen sich dabei? Beschreiben Sie dies mithilfe geeigneter Skizzen.
b) Zeigen Sie, dass alle zu $\overline{OF}$ senkrechten Ebenen die Gleichung E_a: $x_1 + x_2 + x_3 = a$ erfüllen.
Für welche Werte von a schneidet die Ebene E_a den Würfel?
c) Die Ebene E: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ schneidet den Würfel in einem Sechseck. Zeichnen Sie den Würfel und das Sechseck in ein Koordinatensystem und begründen Sie, dass dies ein regelmäßiges Sechseck ist und dass der Würfel mit diesem Schnitt halbiert wird.
d) Zeigen Sie, dass auch das Dreieck ABC zu den Schnittflächen von E_a mit dem Würfel gehört. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert für a. Welche Form hat der abgeschnittene Würfelteil und wie groß ist dessen Volumen? Vergleichen Sie den Umfang des Dreiecks ABC mit dem des Sechsecks aus Aufgabenteil c).
e) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Ecken der Schnittfigur und den Werten von a?
f) Gibt es Ebenen außerhalb der Schar E_a, die den Würfel in einem Fünfeck schneiden?

Abb. 4: Lehrbuchaufgabe zur Abiturvorbereitung

Eine Forschungsaufgabe

Die nächste Aufgabe ist eher eine Lernaufgabe, die aus einem bestimmten Unterrichtskontext erwachsen ist. Die geschlossene Formulierung ist erst nach dem projektartigen Prozess niedergeschrieben.

Aufgabe:
In einem Würfel mit Kantenlänge 1 wandert eine Ebene senkrecht zur Raumdiagonalen durch die Punkte $(0|0|0)$ und $(1|1|1)$.

a) Zeigen Sie, dass die Ebenen folgendermaßen dargestellt werden können:

$$E_t: \quad x_1 + x_2 + x_3 - \sqrt{3} \cdot t = 0;\ 0 \le t \le \sqrt{3}.$$

Benutzen Sie im Folgenden die Darstellung aus a).

b) Was vermuten Sie, welche Schnittflächen mit dem Würfel entstehen, wenn die Ebene vom Ursprung bis zur Ecke $(1|1|1)$ wandert?

c) Wann wird der Flächeninhalt der Schnittflächen maximal?

d) Was passiert mit den jeweiligen Umfängen der Schnittflächen?

e) Wenn die Funktion f den jeweiligen Flächeninhalt beschreibt, was beschreibt dann $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,\mathrm{d}x$?

Im Folgenden werden Lösungswege aufgezeigt, die besonders das Argumentieren und das Vernetzen ins Zentrum stellen. Dabei kann das Programm GeoGebra[1] gute Dienste leisten. Hiermit können 3-dimensionale Objekte dargestellt werden. Auch der Einsatz von CAS ist wie in der Version 4.2 möglich. Gerade das Zusammenspiel von Algebra, Geometrie und CAS kann sich bei der Bearbeitung dieser Aufgabe als fruchtbar erweisen.

Lösungshinweise zu b) und c):
Am Anfang sollte die Kopfgeometrie stehen. Die Lernenden sollten die in **Abb. 5a–c** dargestellten drei Fälle entdecken und in Worten beschreiben.

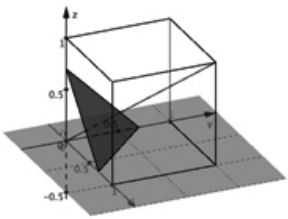


Abb. 5a: 1. Fall: Dreiecke

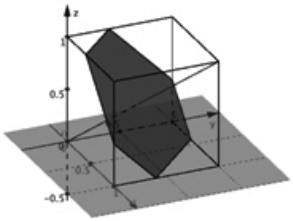


Abb. 5b: 2. Fall: Sechsecke

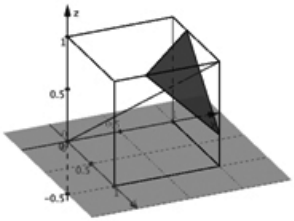


Abb. 5c: 3. Fall: Dreiecke

Der Versuch, die Vermutungen in Worte zu fassen, kann wesentlich zur Problemlösung beitragen.
Eine mögliche Beschreibung:

Zuerst entstehen Dreiecke, die aus Symmetriegründen jeweils gleichseitig sind. Die Schnitte der drei Koordinatenachsen mit den Ebenen liefern die Eckpunkte der wandernden Dreiecke. Wenn die eine Ecke den Punkt $(0|0|1)$ *erreicht hat, werden im*

Folgenden jeweils sechs Kanten (s. **Abb. 5b***) geschnitten. Dabei bewegen sich jeweils zwei Eckpunkte aufeinander zu. Wenn sie sich treffen, gibt es wieder gleichseitige Dreiecke als Schnittflächen. Während im ersten Fall der Flächeninhalt monoton wächst, nimmt er im 3. Fall monoton ab. Der erste und letzte Fall sind symmetrisch.*

Nun kann die Problemstellung in GeoGebra umgesetzt werden.[2] Hierzu werden nur wenige Kenntnisse vorausgesetzt. Auch die Schnittpunktberechnungen kann das Programm übernehmen. Beim Konstruieren der Schnittflächen werden deren Flächeninhalte und deren Kantenlängen automatisch berechnet. Hiermit ergibt sich eine einfache Möglichkeit, durch Parametrisierung so genannte Spurpunkte zu erzeugen. Dadurch entstehen dynamisch die zugehörigen Graphen. **Abbildung 6a** zeigt insgesamt 31 Spurpunkte $(t, A(t))$ für die Flächeninhalte der Schnittflächen, wenn die Ebene vom Ursprung bis zur Ecke $(1,1,1)$ wandert.

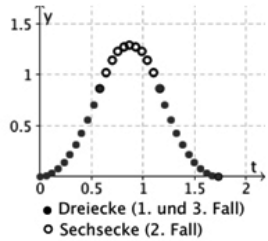


Abb. 6a: Spurpunkte der Flächeninhalte

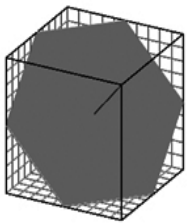


Abb. 6b: regelmäßiges Sechseck mit maximalem Flächeninhalt

Experimentell kann die Frage nach dem maximalen Flächeninhalt damit schon beantwortet werden. Die Vermutung liegt nahe, dass dies genau dann eintritt, wenn als Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck (siehe **Abb. 6b**) entsteht. Die Frage, auf welcher Kurve alle Spurpunkte liegen, führt geradewegs zur Suche nach der abschnittsweise definierten Funktion, die die Flächeninhalte der Schnittflächen beschreibt. Hiermit kann die Maximaleigenschaft regelmäßiger Sechsecke nun auch mit bekannten Mitteln aus der Analysis begründet werden.

Die Lernenden können sich zunächst auf Entdeckungsreise begeben, ohne sich in fehlerträchtigen Berechnungen zu verlieren. Dabei können zwangsläufig weitere Fragen auftauchen. Hier nur eine kleine Auswahl:

- Kann man ohne Rechnung begründen, dass die Flächeninhaltsfunktion eine zusammengesetzte Funktion aus drei quadratischen Funktionen ist?
- Ist die Funktion in den Übergangsstellen stetig und differenzierbar?
- Wird der Flächeninhalt wirklich genau dann maximal, wenn das wandernde Sechseck ein regelmäßiges Sechseck ist?
- Wie ändert sich der Kurvenverlauf, wenn die Ebene nicht mehr senkrecht zur Raumdiagonalen verläuft?
- Was passiert eigentlich mit den Umfängen der Schnittflächen auf der Reise längs der Raumdiagonalen?

Nun wird gerechnet:[3]

Die ersten Dreiecke ergeben sich für $0 \le t \le \frac{1}{3}\sqrt{3}$:

Der Schnitt von E_t mit den drei Koordinatenachsen ergibt die drei Schnittpunkte:

$$R_1(\sqrt{3} \cdot t \mid 0 \mid 0),\ R_2(0 \mid \sqrt{3} \cdot t \mid 0) \text{ und } R_3(0 \mid 0 \mid \sqrt{3} \cdot t).$$

Man kann die drei Punkte auch als Ergebnis aller Permutationen von $0; 0; \sqrt{3} \cdot t$ auffassen. Dies liefert sofort die drei Punkte.

Für $\frac{1}{3}\sqrt{3} < t < \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ergeben sich 6-Ecke. An dieser Stelle ist es hilfreich, einmal innezuhalten. Die Schnittpunkte lassen sich auch argumentativ ermitteln. Ein Schnittpunkt mit einer Kante ist z. B. $S_1(\sqrt{3}\cdot t-1\,|\,0\,|\,1)$. Aus Symmetriegründen ergeben sich die restlichen Schnittpunkte, indem alle Permutation betrachtet werden, hier in der richtigen Reihenfolge:

$$S_1(\sqrt{3}\cdot t-1\,|\,0\,|\,1);\ S_2(1\,|\,0\,|\,\sqrt{3}\cdot t-1);\ S_3(1\,|\,\sqrt{3}\cdot t-1\,|\,0);$$
$$S_4(\sqrt{3}\cdot t-1\,|\,1\,|\,0);\ S_5(0\,|\,1\,|\,\sqrt{3}\cdot t-1);\ S_6(0\,|\,\sqrt{3}\cdot t-1\,|\,1)$$

Für $\frac{2}{3}\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$ ergeben die entsprechenden Schnitte wieder Dreiecke, nun mit den Eckpunkten $T_1(1\,|\,\sqrt{3}\cdot t-2\,|\,1);\ T_2(\sqrt{3}\cdot t-2\,|\,1\,|\,1);\ T_3(1\,|\,1\,|\,\sqrt{3}\cdot t-2)$.

Mit dieser Vorarbeit kann die Ermittlung der Flächeninhaltsfunktion für die Sechsecke mithilfe des Kreuzproduktes durchgeführt werden. Die vier Berechnungen sind aber aufwändig – auch mithilfe des CAS.

Es geht aber auch anders: Durch das Experimentieren werden die Lernenden auf eine wichtige Problemlösestrategie beim Berechnen von Flächeninhalten gestoßen: Erweiterung der Figur – hier durch drei gleichseitige Dreiecke (**Abb. 7**) zu einem großen gleichseitigen Dreieck. Damit kommt auch schon eine weitere Problemlösestrategie zum Tragen: „*Zurückführung auf ein Problem, das man schon einmal gelöst hat*."

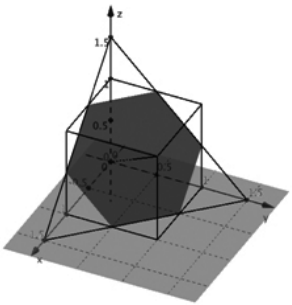


Abb. 7: Der Weg zum Flächeninhalt – Figur ergänzen

Dies liefert:

$$A_{6\text{-Eck}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1+a)^2 - 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-2\cdot a^2+2\cdot a+1);\ a=\sqrt{3}\cdot t-1$$

$$A_{6\text{-Eck}}(t) = 3\sqrt{3}\cdot t^2 + 9\cdot t^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - 3\sqrt{3}\cdot\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Insgesamt ergibt sich für die Flächenfunktion *f*:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot t^2 & : \quad 0 \le t \le \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} - 3\sqrt{3}\cdot\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 & : \quad \frac{1}{3}\sqrt{3} < t < \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot(t-\sqrt{3})^2 & : \quad \frac{2}{3}\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3} \end{cases}$$

Nun können die erzeugten Spurpunkte mit diesem Ergebnis verglichen werden (**Abb. 8a**).

Nehmen Sie sich Zeit und lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler diese beiden Grafiken interpretieren. Es ergeben sich vielfältige Argumentationsanlässe (Verschieben von Parabeln, Hoch-Tiefpunkte, Stauchung …). Durch die Betrachtung der ersten und zweiten Ableitung ergeben sich aus dem Kontext heraus Fragen nach der Differenzierbarkeit und dem Krümmungsverhalten in den beiden Übergängen.

Die Graphen von *f* und f' bieten weitere Argumentationsanlässe (**Abb. 9**). Ertragreich ist es an dieser Stelle, über die Bedeutung von f' in diesem Kontext zu fragen, z. B. so:

An welchen Stellen hat die Ableitung den Wert 2? Was bedeutet das im Sachzusammenhang?

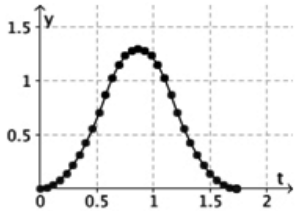


Abb. 8a: Spurpunkte und Graph der Flächeninhaltsfunktion

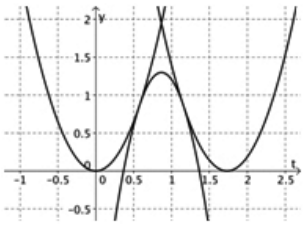


Abb. 8b: Die drei Teilgraphen ohne Einschränkung der Definitionsmenge

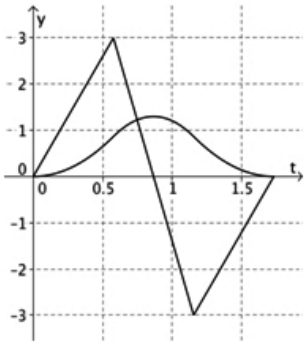


Abb. 8c: Graph und Ableitungsgraph von *f*. Wer ist wer – und wieso?

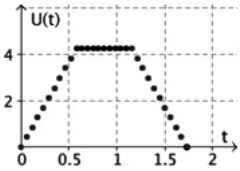


Abb. 9: Spurpunkte der Umfänge

Lösungshinweise zu d):
Die Darstellung der Spurpunkte $(t, U(t))$ für die Umfänge der Schnittflächen zeigt **Abb. 9**. Das Resultat für den ersten und dritten Fall ist nicht überraschend. Wir haben es hier schließlich mit gleichseitigen Dreiecken zu tun.

Die Dreiecke liefern Umfänge U_1 und U_3 mit $U_1(t) = 3\sqrt{6} \cdot t$ und $U_3(t) = -3\sqrt{6} \cdot t + 9\sqrt{2}$.

Nicht unbedingt sofort einsichtig ist aber der 2. Fall: Für die Sechsecke ergeben sich konstante Umfänge. Dies kann zwar mit Methoden der Vektorrechnung gezeigt werden, die Frage nach dem WARUM dieser schönen Beziehung wird damit aber nicht unmittelbar beantwortet.

Hier hilft wieder die Dynamisierung mit GeoGebra. **Abbildung 10** zeigt eine Begründung. Je zwei angrenzende Seiten ergeben immer als Maßzahl $\sqrt{2}$. Durch Umklappen einer Kante erhält man eine Strecke, die als Hypotenuse eines Dreiecks mit den Katheten der Länge 1 gedeutet werden kann. Wird diese schöne Beziehung nicht erkannt, so kann die Berechnung eines Beispiels Einsichten bringen. Für den dargestellten Fall gilt:

$$\sqrt{0{,}7^2 + 0{,}7^2} + \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{2} \cdot (0{,}7 + 0{,}3) = \sqrt{2}\,.$$

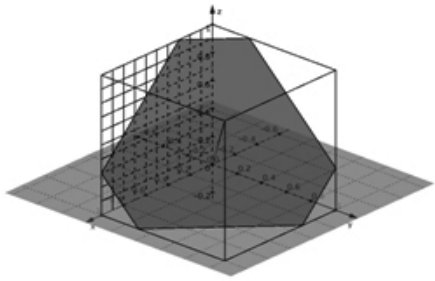


Abb. 10a: Ändern der Blickrichtung – der Umfang ist konstant

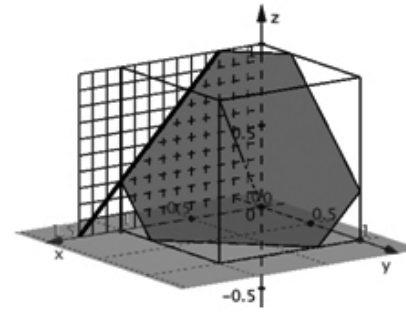


Abb. 10b: Beweis der Konstanz – ohne Worte

Aus Symmetriegründen folgt damit: $U_2(t) = 3\sqrt{2}$.

In der Klammer steht die Zahl 1. Dies gilt unabhängig von der Ausgangskonstellation. Also ist der Umfang unabhängig von *t*.

Lösungshinweise zu e):
Die Integration kann händisch oder aber auch mit GeoGebra durchgeführt werden. Für den ersten und dritten Bereich ergibt sich jeweils ein Flächeninhalt von $\frac{1}{6}$. Für den mittleren Bereich (Sechsecke) erhält man einen Flächeninhalt von $\frac{4}{6}$. Zusammen folgt: $\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Warum kommt gerade der Wert 1 heraus? Das kann doch kein Zufall sein. Hier benötigen die Lernenden schon ein sicheres Wissen über die Bedeutung eines Integrals. Aber dann ist die Beantwortung nicht schwer: Durch diese spezielle Integration werden „unendlich viele Flächen aufsummiert“. Es ergibt sich als Maßzahl ein Wert für ein Volumen. Durch die Wahl der Integrationsgrenzen wird gewährleistet, dass der Einheitswürfel vollständig ausgeschöpft wird. Und der hat nun einmal ein Volumen von 1!

Auch hier können wieder die zugehörigen Spurpunkte betrachtet werden. Als weitere Hilfe kann auch die gleichzeitige (dynamische) Darstellung vieler Schnittflächen dienen, die ein Ausschöpfen des Würfels eindrucksvoll aufzeigt.

Die Ermittlung der drei Terme für die Integralfunktion stellt eine anspruchsvolle Übung dar, auch wenn an dieser Stelle ein CAS benutzt wird. Bei der Wahl der Integrationskonstanten müssen die Lernenden schon über ein gutes Überblickswissen verfügen.

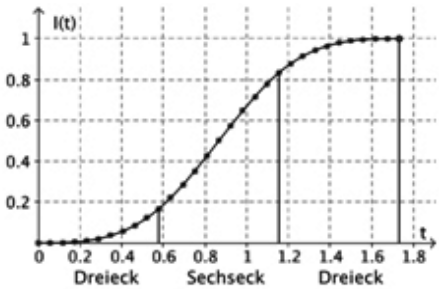


Abb. 11a: Integralfunktion und Spurpunkte

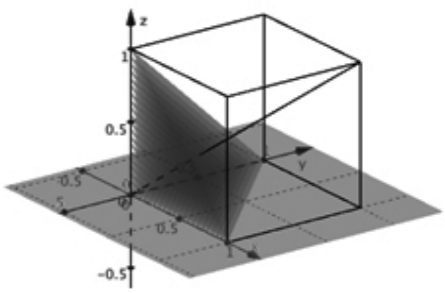


Abb. 11b: Schnittflächenfolge

2 Schrittweiser Aufbau vor Analytischer Geometrie

In den oben beschriebenen drei Aufgabenvarianten ist eine hinreichend ausgebildete Raumanschauung in jedem Falle hilfreich, in manchen Teilen sicher unerlässlich. Die Anforderungen stellen einen Ausschnitt aus einer Vielzahl von geometrischen Phänomenen und Zusammenhängen dar, die bei der aktiven Beschäftigung mit Würfelschnitten entdeckt, beschrieben und begründet werden können. Dies kann in allen Stufen von der Grundschule bis zum Abitur auf der Grundlage von spannenden Experimenten zu substanzreichen Begründungen auf unterschiedlichen Niveaustufen geschehen. Hierzu sollen im zweiten Teil dieses Artikels einige Fragestellungen und Anregungen gegeben werden.

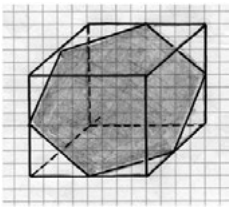


Abb.11c: Regelmäßiges Sechseck im Würfel

Sechseck im Schrägbild – ist dies eben?

Die Mitten der sechs ausgewählten Kanten des Würfels werden durch Strecken verbunden. Ganz gleich, ob man dies nur skizziert oder sorgfältig wie in **Abb. 11** zeichnet, das Auge vermittelt sofort den Eindruck, dass dadurch ein ebenes regelmäßiges Sechseck entsteht. Über Bilder zu Optischen Täuschungen ist man vielleicht schon misstrauisch geworden, man traut den unmittelbaren Sinneseindrücken nicht mehr so ohne Weiteres. Wie kann man die Vermutung stützen, bestätigen oder gar begründen?

Wer schon einmal selbst auf solche Fragestellungen gestoßen ist, weiß um den Wert des Experimentierens vor dem Versuch des oft recht schwierigen Beweisens, vor allem, wenn die elementargeometrischen Grundlagen gering oder nicht präsent sind und die Methoden der Analytischen Geometrie noch nicht bekannt sind. Das Experimentieren hat zudem den Vorteil, dass dabei eine Reihe weiterer interessanter Fragestellungen, Vermutungen und Entdeckungen entstehen. Hier einige in der Unterrichtspraxis erlebte Ansätze.

Abb. 12 Schüler bauen Würfelhäuser

Würfelhäuser

Wie lässt sich in Würfelhäusern leben, die nicht wie üblich auf einer der Seitenflächen stehen, sondern auf einer Ecke, sodass die Raumdiagonale vertikal ist? In einem Projekt[3] Mathematik und Architektur haben Schülerinnen ein solches Würfelhaus eingerichtet, dabei haben sie als optimale Wohnfläche das oben gezeichnete regelmäßige Sechseck gefunden. (**Abb. 12**) Konstruieren und Ausschneiden aus Pappe zeigt dann, dass es genau in den Würfel passt.

Zusätzlich entdeckt man, dass es senkrecht zur Raumdiagonale steht und dass der Durchstoßpunkt genau in der Mitte des Sechsecks liegt und dieser die Raumdiagonale halbiert. Darüber und darunter liegende Stockwerke haben Decken und Boden in Form eines gleichseitigen Dreiecks. Wo müsste man diese Dreiecke anbringen, damit sie die größtmögliche Fläche haben? Sind diese Stockwerke dann hoch genug? Wie kann man diese Räume durch senkrechte Wände unterteilen? … Entdeckungen und Fragestellungen sind ohne Ende.

Abb. 13: „flüssige“ Würfelhalbierung

Würfelhalbierung

Aus dem obigen Schrägbild kann man vermuten, dass das regelmäßige Sechseck den Würfel halbiert. Hier ist die passende Idee zum experimentellen Überprüfen.

Der Plexiglaswürfel wird zur Hälfte mit farbiger Flüssigkeit gefüllt. Die Trennfläche der beiden Hälften ist ein Quadrat. Wenn man den Würfel dann auf eine Kante stellt, so ist die Trennfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $\sqrt{2} \cdot a$. Wenn der Würfel auf einer Ecke steht, sodass die Raumdiagonale vertikal ist, dann ist die Trennfläche ein regelmäßiges Sechseck. Dass dieses eben ist, ist evident.

Auch hieraus ergibt sich wiederum eine Reihe weiterer Experimente mit interessanten Vermutungen und Fragestellungen. Welche Trennflächen sind möglich, bei dieser Art der Würfelhalbierung? Bei welcher Stellung des Würfels ergibt sich die größte Trennfläche. Welche Symmetrien können bei den Trennflächen auftreten? Ästheten mit Holzbearbeitungskompetenz stellen verschiedene Schnittflächen aus einem Holzwürfel her. Einfacher ist es, ein Pappmodell herzustellen. Dabei ergibt sich so ganz nebenbei die interessante Frage, ob man die Zweiteilung durch Teilen eines geeigneten Netzes mit einem geraden Schnitt vorbereiten kann (**Abb. 15** und **16**).

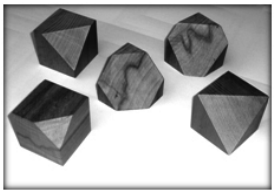


Abb. 14: Holzmodelle von Würfelschnitten

Abb. 15: Modell der Halbierung

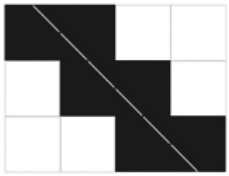


Abb. 16a: Verblüffendes Netz

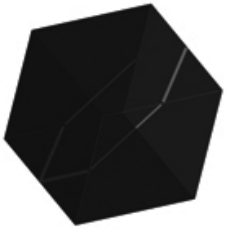


Abb. 16b: durchsichtiges Schrägbild

Kantenmodelle

Heute gibt es eine Reihe von geeigneten Lehrmaterialien, mit denen man die bisher betrachteten Würfelschnitte an Kantenmodellen veranschaulichen kann. Beim Experimentieren stellt sich eine Reihe von Fragen, Vermutungen und Einsichten ein, die in unterschiedlicher Tiefe zu Nachforschungen und Begründungen führen können. Hier ein kleiner Auszug aus Experimentierphasen mit Schülerinnen und Schülern oder auch aus eigenem Erleben.

Magnetbaukästen

Viele Schülerinnen und Schülern haben solche Baukästen zu Hause. Aus den beiliegenden Plänen haben sie vielleicht schon Würfel, Tetraeder, Oktaeder oder andere schöne Kantenmodelle gebaut und dabei auch interessante geometrische Erfahrungen gemacht: z. B. über Stabilität von Tetraedern und Oktaedern gegenüber der Instabilität von Würfeln, über die möglichen Höhen von Pyramiden mit unterschiedlichen Grundflächen u. Ä. Beim Versuch, die Raumdiagonalen oder Kanten der obigen Schnittflächen in einen Würfel einzubauen, wird man schnell feststellen, dass dies mit den vorgegebenen Stablängen nicht möglich ist. Passende Strohhalme helfen hier, man kann sie auf die entsprechenden Längen zuschneiden. Mit den entsprechend unterteilten Kanten des Würfels kann man dann fünf der Schnittflächen darstellen, darunter die beiden maximalen Dreiecke und das regelmäßi-

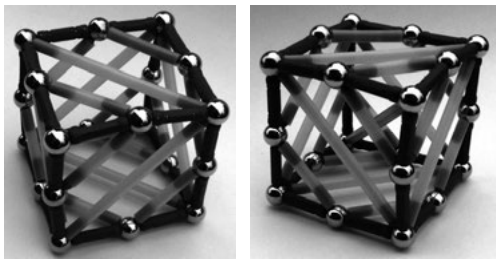


Abb. 17: Nachbau der Schnittflächen mit einem Magnetbaukasten

ge Sechseck. Die Symmetrien bei der Reise durch den Würfel werden beim Bauen als selbstverständlich erfahren und im räumlichen Modell sichtbar. Falls man die Kanten aus vier Magnetstäben und fünf Kugeln aufbaut, lassen sich weitere Schnittflächen einbauen.

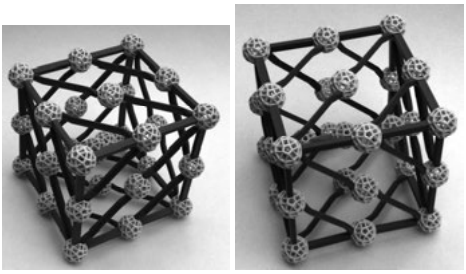


Abb. 18: Darstellung der Schnittflächen mit einem Zoome-Tool-Baukasten

Zome-Tool Baukästen[4]

Diese von amerikanischen Mathematikern entwickelten Baukästen bieten besondere Möglichkeiten zum Entdecken von geometrischen Zusammenhängen an Kantenmodellen von Körpern. Die Kugeln enthalten vorgefertigte Stecklöcher, in die die Verbindungsteile in bestimmten Winkeln eingesteckt werden können. Die Verbindungen gibt es in bestimmten Längenverhältnissen, bei denen unter anderem der Goldene Schnitt eine Rolle spielt. Hiermit lassen sich die mit den Magnetbaukästen erstellten Modelle besonders akkurat herstellen (**Abb. 17, 18, 19**) und damit viele Vermutungen ausschärfen.

Viele der oben schon erwähnten Entdeckungen und Vermutungen lassen sich ausschärfen. So erfährt man beim Bauen unmittelbar, dass man für die Kanten der maximalen Dreiecksflächen die gleichen sechs Stablängen benötigt wie für die regelmäßige Sechseckschnittfläche, die Flächen haben also den gleichen Umfang (siehe 1.3 in diesem Artikel). Die beiden kleinen Dreiecksschnittflächen weisen gerade den halben Umfang auf.

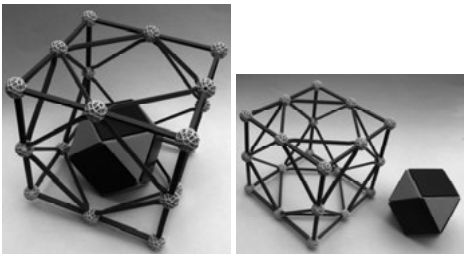


Abb. 19: Alle Sechsecke begrenzen den Kuboktaeder

Von den Sechsecken zum Kuboktaeder

Wie man beim freien Experimentieren auch zu ganz anderen Entdeckungen geraten kann, zeigt die folgende Denk- und Experimentierkette:

Das regelmäßige Sechseck liegt senkrecht zur Raumdiagonalen des Würfels. Der Würfel weist vier Raumdiagonalen auf, aus Symmetriegründen muss es zu jeder dieser Raumdiagonalen die passende regelmäßige Sechseckfläche geben. Beim Einbauen dieser Flächenkanten entsteht ein Modell (**Abb. 19**), an dem man neben anderen Zusammenhängen auch einen interessanten Körper (den Kuboktaeder) entdeckt und in einem Flächenmodell verdeutlicht.

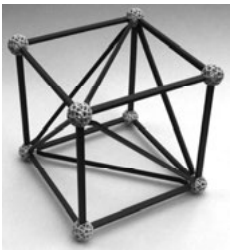


Abb. 20: Tetraeder im Würfel

Ein ähnlicher Gedankengang mit den maximalen Schnittdreiecken führt zu dem in den Würfel einbeschriebenen Tetraeder (vgl. Artikel VOGT in diesem Heft).

Wir widerstehen der Versuchung, weitere Beispiele zu Entdeckungsreisen anzugeben, und erhalten damit dem Leser die Chance, die Spannung und die Freude beim eigenen Experimentieren zu erleben.

Bewegte Bilder zur Reise durch den Würfel
So richtig anschaulich wird die Reise durch den Würfel erst durch bewegte Bilder. Mit der heute verfügbaren Geometriesoftware ist es möglich, solche Filme selbst herzustellen, etwa mit Geogebra als Animated Gif[2]. Es geht aber auch mit dem herkömmlichen Daumenkino, das man bereits in der Grundschule oder in der Orientierungsstufe selbst herstellen und einsetzen kann (vgl. [5]).

Abb. 21: Daumenkino im Einsatz

3 Unerwartete Verbindungen

Kombinatorik trifft Analytische Geometrie – intelligentes Üben
Die Permutationen dreier Zahlen können jeweils als Punkt im dreidimensionalen Raum interpretiert werden. **Abbildung 22** zeigt das Ergebnis für die Zahlen 1, 4 und 7. Schon ergeben sich wieder viele Fragen, z. B.:

- Liegen alle Punkte in einer Ebene? Und wenn ja, was kann man über diese Ebene aussagen?
- Entstehen immer 6-Ecke?
- Gibt es auch regelmäßige Sechsecke?

Diese Aufgabe ist ein Beispiel für intelligentes Üben und lässt Raum für Vernetzungen. Übrigens liegen immer alle Punkte in einer Ebene, die senkrecht zur Raumdiagonalen eines Würfels verläuft. Dies kann übrigens auch mit GeoGebra entdeckt werden. Die Frage nach dem Warum eröffnet Forschungen auf unterschiedlichem Niveau.

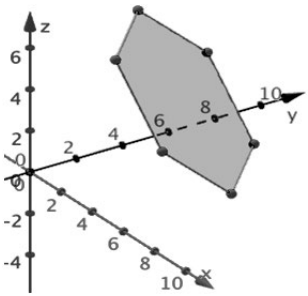


Abb. 22: Permutationen im Raum

Analytische Geometrie trifft Stochastik
Ein Fürst der Toskana fragte Galilei: „*Warum erscheint beim Wurf dreier Würfel die Summe 10 öfter als die Summe 9, obwohl beide Summen auf sechs verschiedene Arten eintreten können*?“ Dieses schöne Problem lässt sich mithilfe von Spielserien oder Simulationen untersuchen. Danach kann das Zählen aller möglichen Ergebnisse mit der analytischen Geometrie verknüpft werden.

Die Bedingung $x + y + z = Augensumme$ beschreibt mit der Brille der analytischen Geometrie nichts anderes als Ebenen, die senkrecht zur Raumdiagonalen des in der Abbildung dargestellten Würfels verlaufen.

Jedes Ergebnis eines Dreifachwurfs kann als Punkt in einer dieser Ebene interpretiert werden. Da die kleinste auftretende Summe dem Punkt (1|1|1) entspricht, muss ein Eckpunkt des Würfels mit Kantenlänge 5 dieser Punkt sein. Als Schnittflächen finden wir

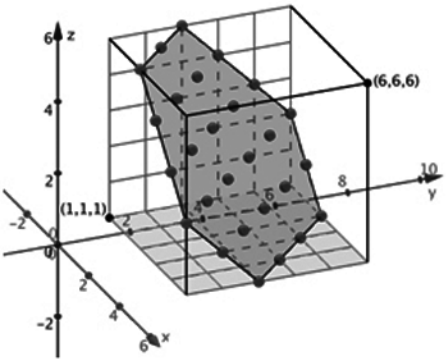


Abb. 23: Augensumme 10 beim Dreifachwurf – einmal anders dargestellt

hier eine Teilmenge der bekannten Dreiecke und Sechsecke. Die auftretenden Muster schaffen interessante Argumentationsanlässe.

Warum die Augensumme 10 genau zwei Ergebnisse mehr hat als die Augensumme 9, kann hier „gesehen“ werden. Mathematik als Wissenschaft von Mustern und Strukturen sollte den Lernenden so oft wie möglich begegnen.

Anmerkungen

1 Hier wurde die β-Version von GEO GEBRA 5 verwendet.

2 Downloads zu diesem Beitrag finden Sie unter www.der-mathematikunterricht.de. Wählen Sie dort das Heft 3/2013 aus.

3 Eine ähnliche Berechnung beschreibt STRICK in [3].

4 Das Foto Abb. 12 entstand in einer AG „Mathematik und Architektur“, in der auf Anregungen aus [4] zurückgegriffen wurde.

5 Genauere Informationen und Bezugsadressen findet man unter https://www.vismath.eu/zometool

6 HEINRICH BAUERSFELD hat dies auf der 26. Bundestagung für Didaktik der Mathematik mit vielen anderen schönen Beispielen vorgestellt, siehe [5]

Literatur

[1] Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18. 10. 2012)

[2] Günter Schmidt, Martin Zacharias, Arno Lergenmüller (Hrsg), Mathematik Neue Wege – Lineare Algebra/Analytische Geometrie, Braunschweig 2010

[3] Heinz-Klaus Strick, Parallele Schnitte durch einen Würfel, in MNU 64/2, 2011

[4] Elke Lauber, Wohnen in Würfelhäusern, in mathematik lehren, Heft 80, 1997

[5] Bauersfeld, Heinrich, Drei Gründe, Geometrisches Denken in der Grundschule zu fördern, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1992, Hildesheim 1993