Gewinnchancen analysieren: Der Hase und die Schildkröte

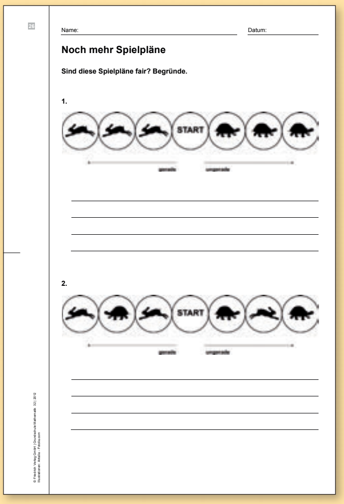
Arne Pöhls

In Äsops Fabel wird der siegessichere Hase von der langsamen Schildkröte beim Wettrennen geschlagen. Auch bei dem hier beschriebenen Spiel scheint der Hase die bessere Ausgangsposition zu haben. Bei genauerer Betrachtung ist es jedoch gerade anders herum.

GEBIET:	Daten, Wahrscheinlichkeit, Argumentieren, Problemlösen
LERNBEREICH:	Daten erfassen und darstellen, Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten einschätzen
SCHULJAHR:	3.–6.
SOZIALFORM:	Sitzkreis, Einzel- und Partnerarbeit
ZEITBEDARF:	2–4 Unterrichtsstunden

MATERIALPAKET

24 **Hase und Schildkröte**. Spielplan und Spielregeln.
25 **Hase und Schildkröte**. Auf dem Arbeitsblatt werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, zunächst eine Vermutung zu den Gewinnchancen zu äußern, diese dann im Experiment zu überprüfen und im Anschluss, angebunden an die Erfahrungen aus dem Spiel, die Siegchancen zu analysieren.
26 **Noch mehr Spielpläne**.


Name: Datum:
Noch mehr Spielpläne
Sind diese Spielpläne fair? Begründe.
1.

2.

Bewusst spielen im Spiel „Hase und Schildkröte" (s. **KASTEN**) zwei Tiere gegeneinander – und nicht zwei Kinder, wie bei Gesellschaftsspielen üblich. Die Kinder sollen eine eher neutrale Beobachterposition einnehmen, so dass persönliche Vorlieben oder Ehrgeiz die Spielanalyse nicht überschatten. Aufgabe der Kinder ist es zu beurteilen, welches der Tiere die besseren Gewinnchancen hat.

Spielanalyse

Beim Spiel „Hase und Schildkröte" wird für jedes Tier dreimal gewürfelt. Hase und Schildkröte rücken jeweils ein Feld nach links, wenn der Spielwürfel eine gerade Zahl (g) zeigt, und ein Feld nach rechts, wenn der Spielwürfel eine ungerade Zahl (u) zeigt. Es gibt acht gleich wahrscheinliche Ereignisse: (ggg); (ggu); (gug); (ugg); (uuu); (uug); (ugu); (guu). Zwei der acht Ereignisse führen die Spielfigur auf ein Hasenfeld, nämlich die Ereignisse (ggg) und (uuu). Die übrigen sechs Ereignisse lassen die Spielfigur auf einem Schildkrötenfeld enden, weil sich ein gerader und ein ungerader Wurf aufheben. Die mittleren Hasenfelder können durch dreimaliges Würfeln nicht erreicht werden.

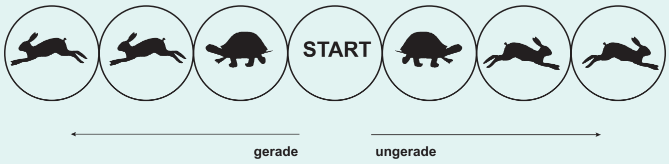
Darum beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit für den Hasen nur 25 %. Die Schildkröte hat eine dreimal so große Gewinnchance von 75 %.

Eine einfachere Variante

Eine Möglichkeit, das Spiel zu vereinfachen, wäre einen anderen Zufallsgenerator zu wählen. Das Werfen eines Wendeplättchens oder einer Münze hat im Gegensatz zum Werfen eines Würfels nur zwei Ergebnisse, die man dann leichter mit dem Zug nach links bzw. rechts identifizieren kann. Diese Vereinfachung spart allerdings eine Lernchance aus: In der Stochastik wird begrifflich zwischen Ergebnis und Ereignis eines Zufallsexperiments unterschieden: Die Ergebnisse 2, 4 und 6 werden zum Ereignis „gerade Zahl würfeln" zusammengefasst (s. auch „Grundsätzliches" auf S. 40). Ohne die Begriffe explizit zu erwähnen, kann das Verständnis dafür in der Grundschule schon propädeutisch vorbereitet werden.

DER HASE UND DIE SCHILDKRÖTE

Hase und Schildkröte spielen gegeneinander. Für jedes Tier wird eine Spielfigur auf das Startfeld gesetzt und dreimal gewürfelt. Bei einer geraden Zahl wird die Spielfigur ein Feld nach links, bei einer ungeraden Zahl ein Feld nach rechts gesetzt. Der Hase erhält einen Punkt, wenn er nach drei Würfen auf einem Hasenfeld steht. Die Schildkröte erhält einen Punkt, wenn sie nach drei Würfen auf einem Schildkrötenfeld steht.



Vorbereitungen

Der Spielplan **Hase und Schildkröte** 24 muss in halber, das Arbeitsblatt **Hase und Schildkröte** 25 in Klassensatzstärke kopiert werden. Weiter werden ein halber Klassensatz an Spielwürfeln und jeweils ebenso viele Hasen- und Schildkröten-Spielfiguren benötigt. Schildkröten-grüne und Hasen-schwarz-braune Pöppel bieten sich an. Würfelbecher können herumrollende Würfel vermeiden. Würfelunterlagen mindern die Lautstärke. Aus Bastelfilz sind sie schnell für die Mathesammlung hergestellt. Ein Schulheft erfüllt auch den Zweck.

Zur Demonstration des Spiels kann eine DIN-A3-Kopie des Spielplanes genutzt werden. Vielleicht finden sich in Ihrem Fundus eine Schildkröten- und eine Hasenminiatur, die hier als Spielfiguren eingesetzt werden können.

Der Einstieg

Zunächst müssen die Kinder die Spielregeln verstehen. Die Erfahrung zeigt, dass es Kinder gibt, die die Regeln uminterpretieren:

- Es gibt Kinder, die den jeweiligen Spielstein nicht nur ein Feld in die entsprechende Richtung setzen, sondern die gewürfelte Augenzahl laufen.
- Es gibt Kinder, die nach dreimaligem Würfeln nicht wieder auf Start beginnen.
- Es gibt Kinder, die die Punkte nicht nach einer Runde, sondern nach jedem Zug bestimmen.

Die weitaus meisten Kinder – auch in Brennpunkt-Klassen – verstehen die Regeln allerdings richtig.

Nach dem Erarbeiten der Spielregeln sollte zunächst eine Runde gemeinsam mit der Lerngruppe gespielt werden. Sind Hase und Schildkröte dreimal gesetzt, werden eventuelle Siegpunkte in eine schnell skizzierte Tabelle eingetragen.

Der Arbeitsauftrag

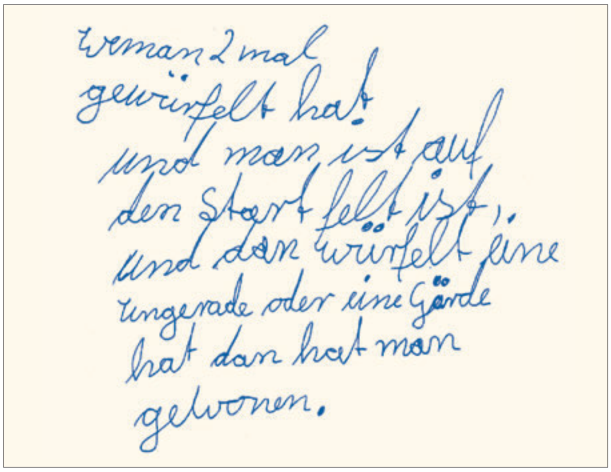
„Ich möchte heute mit euch herausfinden, ob das ein faires Spiel ist. Was meint ihr, wie kann man das herausfinden?" kann ein Einstieg in die Arbeitsphase sein. Das häufige Spielen des Spiels soll angeregt werden.

Vermutungen äußern

Bevor es losgeht, werden die Arbeitsblätter **Hase und Schildkröte** 25 verteilt. Jedes Kind soll zunächst alleine die erste Aufgabe bearbeiten und sich durch ein Kreuz festlegen, von welchem Tier es glaubt, dass es häufiger gewinnt. Die meisten Kinder sehen den Hasen im Vorteil.

Fachlich viel interessanter ist die ebenfalls geforderte Begründung. In den Erprobungsklassen konnten mehrere Begründungsmuster festgestellt werden:

- Geometrische Deutungen: „Der Hase, denn er hat mehr Felder", „Die Schildkröte, denn die Schildkrötenfelder sind näher am Start", „Beide gleich,



1 Lena hat die Erfahrung gemacht, dass man nach zweimaligem Würfeln häufig wieder auf dem Startfeld steht

der Hase hat zwar mehr Felder, aber die Schildkröte muss nicht so weit laufen."

- Deutungen aus der Einkleidung: „Der Hase, weil er schneller ist und gewinnt", „Ich kenne die Geschichte, dort gewinnt die Schildkröte."
- Deutungen über Wahrscheinlichkeiten – eventuell aus der subjektiven Erfahrung heraus, dass die meisten Kinder- und Gesellschaftsspiele fair sind: „Wer mehr Glück hat, gewinnt."

Spielen, Daten sammeln, Vermutungen überprüfen

Zu Beginn der Experimentierphase ist es wichtig, dass die Lehrkraft auf die Einhaltung der Spielregeln achtet. Gängige Uminterpretationen der Regeln und somit Fehlerquellen sind im Abschnitt „Der Einstieg" beschrieben.

Viele Kinder führen beim Spielen selbstständig eine Strichliste. Andere müssen dazu ermutigt oder aufgefordert werden. Für manche Kinder ist allerdings die Frage „Auf welches Blatt schreiben wir unsere Notizen?" schon die erste Hürde. Bei Bedarf muss die Lehrkraft während der Experimentierphase organisatorische Hilfestellungen geben.

Es gibt Kinder, die wissen wollen, wie oft sie das Spiel spielen sollen. „Bis du dir sicher bist, wer die besseren Gewinnchancen hat" ist eine gute Antwort. Kinder, die noch nie Gewinnchancen verglichen haben, mögen davon irritiert sein, sollten aber ermutigt werden, häufiger zu spielen. „Meinst du, wenn der Hase und die Schildkröte das Spiel immer wieder spielen, dass dann auch … häufiger gewinnt?" Es ist wichtig, die Kinder auf den Prozess aufmerksam zu machen, in dem sie sich gerade befinden. Daher ist es ratsam, sie darauf hinzuweisen, dass es gerade um die Überprüfung der eigenen Vermutung geht.

Es kann vorkommen, dass der Zufall bei einigen Teams dafür sorgt, dass der Hase – trotz vieler Spielrunden – fast so häufig oder gar häufiger als die Schildkröte gewinnt. Das „Gesetz der großen Zahlen" (vgl. „Grundsätzliches" auf S. 40) spricht zwar gegen den Sieg des Hasen bei hinreichend vielen Spielen, dennoch kann ein solcher Fall eintreten und den Erkenntnisgewinn der betroffenen Kinder behindern. Sie können in solchen Situationen ihre Daten mit anderen Teams zusammentun. Die Lehrerin sollte sich auf jeden Fall während der Experimentierphase einen Überblick über die Resultate verschaffen und zur Produktion weiterer Ergebnisse anregen.

Viele Erkenntnisse entstehen bereits während der Experimentierphase. Wenn die Lehrkraft in dieser Phase gute Ideen mithört, sollte sie die Kinder anhalten, diese aufzuschreiben. Die meisten Kinder entdecken beispielsweise, dass nach dem Werfen zweier verschiedener Ereignisse, (gu) oder (ug), der Spielstein stets auf einem Schildkröten-Feld landet. Oft lassen nur die Reaktionen der Kinder, beispielsweise der vorzeitige Abbruch der Runde oder ein Ausruf darauf schließen. Auch auf Teileinsichten und noch unvollständige Argumentationen muss geachtet werden. Durch geschickte Fragen, die keine Antworten vorwegnehmen, kann die Lehrkraft die Kinder zum Formulieren anregen.

Warum gewinnt die Schildkröte häufiger?

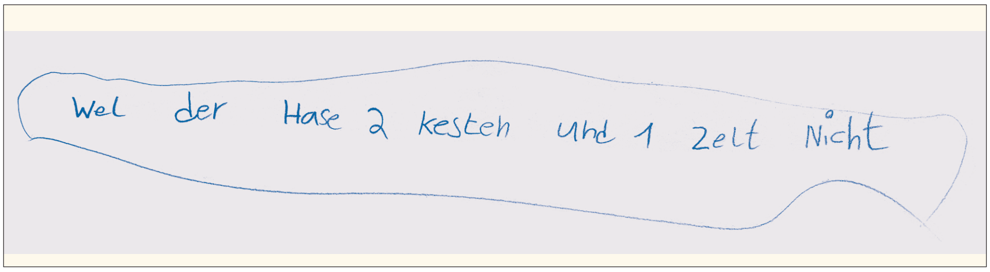
In der dritten Aufgabe auf dem **Arbeitsblatt** Hase und Schildkröte 25 sollen die Kinder ihre Erkenntnisse verschriftlichen und die Spielergebnisse begründen. Die allgemeine Kompetenz des Argumentierens ist nicht nur den stärkeren Schülerinnen und Schülern vorbehalten

---

LERNEN BEGLEITEN

Beobachtungshilfen

- Wer hält sich an die vorgegebenen Spielregeln?
- Wer begründet seine Vermutung zu den Gewinnchancen der Tiere?
- Wer hält die Ergebnisse der Spielrunden übersichtlich fest?
- Wer hat einen Ansatz zur Erklärung der Spielausgänge? Wer kann seinen Ansatz im Gespräch weiterentwickeln?



2 Kayla entdeckt, dass je ein Hasenfeld unerreichbar ist

(**Abb. 1 und 2**). Im Sinne eines kompetenz- und förderorientierten Unterrichts können leicht auch unvollständige Argumentationen gewürdigt werden.

Folgende Argumentationsmuster, die auch in Mischformen auftraten, konnten beobachtet werden:

- Argumentation über Wahrscheinlichkeiten: Einige Kinder formulieren, es sei „häufig“ oder „normal“, dass die ersten beiden Würfe verschieden sind. Etwa: „Es geht fast immer hin und her“ (s. auch **Abb. 1**). Dies ist ein wichtiger Ansatz zu einer vollständigen Analyse des Spiels. Die Kinder sollten ermutigt werden, ihren Gedanken zu Ende zu denken und mit eigenen Worten zu umschreiben: „Und wie ist es, wenn du zwei gleiche Würfe hast?“
  Tatsächlich besteht eine 50%ige Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden Würfe verschiedene Ergebnisse haben (vgl. „Doppelter Münzwurf mit dem Fuchs und den Raben“ auf S. 12). Für die anderen Fälle, dass zwei gleiche Ergebnisse fallen, die Figur also auf dem mittleren Hasenfeld landet, schließt sich wiederum eine 50%ige Wahrscheinlichkeit an, dass die Figur auf einem Schildkrötenfeld landet: „Eine halbe Chance und dann noch mal die Hälfte von der anderen Hälfte für die Schildkröte.“
- Argumentation über kombinatorisches Auszählen: „Nur wenn drei gleiche kommen, gewinnt der Hase. Wenn ein anderer dazwischenkommt, gewinnt die Schildkröte“ ist ein Ansatz zur kombinatorischen Auflistung aller möglichen Ereignisse. Kinder mit diesem Ansatz werden angeregt, unter den Feldern des Spielplans zu notieren, wie man die Felder erreichen kann. Anschließend wird gefragt: „Wie kannst du sicher sein, dass du alle Möglichkeiten gefunden hast?“ „Der Ungerade kann am Anfang sein, in der Mitte oder am Ende“ ist eine Argumentation, die die Reihe (ugg), (gug), (ggu) und somit ein Schildkrötenfeld vollständig begründet. Hinweise, wie Kinder individuell mit kombinatorischen Fragestellungen umgehen, gibt u. a. Bönig (2010).
- Argumentation über die Geometrie des Spielfeldes: Einige Kinder bleiben bei der geometrischen Interpretation. Sie schreiben, dass das Hasenfeld weit weg sei, man müsse weiter laufen. Das ist richtig. Hier kann ein Gegenargument vorgebracht werden: „Aber der Hase hat doch dafür zwei Felder!“ Einige Kinder erwidern dann, dass das mittlere Hasenfeld unerreichbar sei: „Aber da kommt man gar nicht hin“ (s. auch **Abb. 2**). Die Kinder sollten ermutigt werden, die Geometrie des Spielfeldes mit Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit oder mit einer kombinatorischen Auszählung zu verbinden: „Warum ist es denn schwierig so weit zu laufen?“
- Argumentation über Einkleidungen, Schicksal o. Ä.: „Die Schildkröte ist schlau, darum gewinnt sie.“ „Der Hase hat mehr Pech.“ Auch hier bietet es sich an, die Kinder die Möglichkeiten, wie man die einzelnen Felder erreichen kann, auflisten zu lassen. „Was muss man würfeln, um eines der äußeren Hasenfelder zu erreichen?“ Und nach gegebener Antwort: „Wie ist es bei den anderen Feldern?“

Ergebnissicherung

Der Arbeitsauftrag, das Spiel so zu verändern, dass es fair ist, ermöglicht den Kindern, ihre gewonnenen Erkenntnisse anzuwenden und umzusetzen. Anschließend präsentieren sich die Kinder gegenseitig ihre Entwürfe und analysieren sie gemeinsam. Alternativ kann das Arbeitsblatt **Noch mehr Spielpläne** 26 genutzt werden. Jeder Spielplan dort ist übrigens von einem Schüler oder einer Schülerin des Autors entwickelt worden.

Bönig, D.: Individuelle Lernwege in der Kombinatorik unterstützen. In: Grundschule Mathematik 27 (2010), S. 14–17.