HERBERT HENNING UND MIKE KEUNE

Niveaustufen von Modellbildungskompetenzen

1 Mathematische Kompetenz

Kompetenzerwerb und Bildung stehen auf einer Stufe, beschreiben dieselben Fähigkeiten. KLIEME et al. (2003) argumentieren in einer Expertise zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards, dass Bildung als Erwartung an Lernprozesse Fähigkeiten von Subjekten beschreibt, in der Gesellschaft mündig und selbstbestimmt handlungsfähig zu sein. Kompetenzen beschreiben gerade diese Fähigkeiten, die der Bildungsbegriff meint. Der Beitrag schließt sich dem von WEINERT definierten allgemeinen Kompetenzbegriff an (vgl. WEINERT, 2001).

Eine exakte Definition des Begriffs mathematische Kompetenz gibt NISS (2003).

> *Mathematische Kompetenz als Fähigkeiten in einer Vielfalt inner- und außermathematischer Kontexte und Situationen, in denen Mathematik eine Rolle spielt oder spielen könnte, mathematisch zu handeln (zu verstehen, zu entscheiden und zu denken).*

2 Modellbildungskompetenz

MAAß (2004) berücksichtigt in ihrer Definition von Modellbildungskompetenzen die Bereitschaft, die vorhandenen Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Modellbildung einzusetzen und bindet damit das motivationale Element (vgl. WEINERT, 2001) in die Begriffsbestimmung ein. Die Begriffsdefinition und Verwendung sowie die später vorgenommene Auflistung von Teilkompetenzen lässt auf eine Sichtweise von MAAß schlussfolgern, welche Fähigkeiten und Kompetenzen eher synonym verwendet.

> *Modellbildungskompetenzen umfassen die Fähigkeiten und Fertigkeiten, Modellierungsprozesse zielgerichtet und angemessen durchführen zu können sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten in Handlungen umzusetzen.*

Deutlich wird die niveaugleiche Verwendung der Begriffe Kompetenz und Fähigkeit, wenn MAAß eine Liste von fünf Teilkompetenzen der Modellbildungskompetenz angibt, welche auf den Aktivitäten während des idealtypischen Modellbildungsprozesses (z. B. BLUM, 1996) beruhen. Diese Teilkompetenzen gibt die Autorin folgendermaßen an:

- Kompetenz zum Verständnis des realen Problems und zum Aufstellen eines realen Modells,
- Kompetenz zum Aufstellen eines mathematischen Modells,
- Kompetenz zur Lösung der mathematischen Fragestellung,
- Kompetenz zur Interpretation der mathematischen Lösung und
- Kompetenz zur Validierung der gefundenen Lösung.

Modellbildungskompetenz hat Komponenten von technischen Fertigkeiten (technical level), im Kontext (radius of action) sowie der Reichweite bezüglich der Modellbildungsphasen

(degree of coverage). Dies erlaubt die Schlussfolgerung, dass Modellbildungskompetenz nur dann vorliegt, wenn ein gewisses Fähigkeitsniveau in allen Dimensionen existiert. Ein hohes Fähigkeitsniveau allein, z. B. auf dem technischen Gebiet, genügt demnach nicht, um von Modellbildungskompetenz zu sprechen.

Unter Modellbildungskompetenz wird in dieser Arbeit das System von auf den Modellbildungsprozess gerichteten Fähigkeiten und Fertigkeiten, das prozessuale Wissen, die Fähigkeit zur Metaanalyse der Anwendung von Mathematik sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und das Wissen zur Lösung von realen Problemen in einer Vielzahl von Situationen einzusetzen, verstanden. Die Modellbildungskompetenz umfasst somit fachliche, fächerübergreifende und Handlungskompetenzen.

Es stehen bei der Beschreibung von Modellbildungskompetenzen und deren charakterisierenden Fähigkeiten hauptsächlich kognitive Merkmale im Vordergrund.

Das Konzept der *Niveaustufen von Modellbildungskompetenzen* ist geeignet zur

- Beschreibung von Fähigkeiten und ihre graduelle Ausprägung,
- Auswahl und Zuordnung von unterrichtlichen Inhalten,
- kriteriumsorientierten Interpretation von Schülerleistungen und
- Operationalisierung von Zielsetzungen (Herausbildung der Kompetenz „Mathematische Modellierung“)

Das Stufenmodell kann somit als deskriptives, normatives, und metakognitives Hilfsmittel Verwendung finden (vgl. NISS, 2003).

3 Niveaustufen der Modellbildungskompetenz

Fähigkeiten und Fertigkeiten in der Modellbildung werden einer Niveaustufe zugeordnet.
Stufe 1: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes
Stufe 2: Selbstständige Modellbildung
Stufe 3: Metareflexion über Modellbildung
Die vorgenommene Einteilung korrespondiert dabei mit den Kompetenzklassen der PISA-Studie (OECD, 2000, S. 50) bzw. mit dem Kompetenz-Cluster-Modell (OECD, 2003).

Die OECD charakterisiert in den theoretischen Überlegungen zur PISA-Studie drei Kompetenzklassen:
Klasse 1: Wiedergabe, Definition und Berechnung
Klasse 2: Querverbindungen und Zusammenhänge herstellen, um Probleme zu lösen
Klasse 3: Einsichtsvolles mathematisches Denken und Verallgemeinern
Zur Charakterisierung der Niveaustufen werden diesen Kompetenzklassen Fähigkeiten zugeordnet. Somit ergibt sich die folgende Klassifizierung als Grundlage der Entwicklung von Niveaustufen akzentuierter Modellbildungsaufgaben.

Stufe 1: Erkennen und Verstehen des Modellbildungskreislaufes

Die Niveaustufe des Erkennens und Verstehens des Modellbildungskreislaufs wird näher charakterisiert durch:

- die Fähigkeit, den Modellbildungsprozess zu beschreiben,
- die Fähigkeit, einzelne Phasen zu charakterisieren und
- die Fähigkeit, einzelne Phasen zu unterscheiden bzw. während eines Modellbildungsprozesses zu lokalisieren.

Stufe 2: Selbstständige Modellbildung

Das Erreichen dieser Niveaustufe wird charakterisiert durch:

- die Fähigkeit, verschiedene Lösungsansätze zu entwickeln,
- die Fähigkeit zur Einnahme verschiedener Modellbildungsperspektiven (z. B. Algebra, Geometrie, Stochastik) und
- die Fähigkeit zur selbstständigen Modellbildung (Informationen abstrahieren, Auswahl und Verknüpfung von Größen, Mathematisieren, Modelllösung, Interpretation).

Ein geringer Grad innerhalb dieser Stufe ist das bloße Ausprobieren verschiedener Lösungsansätze. Die Schülerinnen und Schüler müssen Faktenwissen und zur Verfügung stehende Standardverfahren aus verschiedenen mathematischen Teilbereichen vergleichen und anwenden. Bei Änderung oder Erweiterung des Problemkontextes müssen die Schülerinnen und Schüler zu einer Änderung des bisher aufgebauten Modells fähig sein (IKEDA und STEPHENS, 2001). Ein höherer Grad innerhalb dieser Stufe ist gegeben, wenn selbstständig neue Lösungsverfahren (die nicht zum bisherigen Wissensumfang der Schülerinnen und Schüler gehört haben) entwickelt werden.

Eine Kompetenzerweiterung ist darin zu sehen, dass für ein Problem mehrere Modelle gefunden werden bzw. ein Modell mittels Dynamischer Modellbildung verfeinert wird.

Stufe 3: Metareflexion über Modellbildung

Metareflexion über den Modellbildungsprozess und über die Anwendung von Mathematik wird charakterisiert durch:

- Die Fähigkeit (unabhängig vom konkreten Problem), über Anwendungen der Mathematik zu reflektieren.
- Die Fähigkeit zur kritischen Analyse des Modellbildungsprozesses.
- Die Fähigkeit, über den Anlass von Modellbildung (insbesondere ergebnisorientierter Modellbildung) zu reflektieren.
- Die Fähigkeit, Kriterien der Modellbildungsevaluation zu charakterisieren.

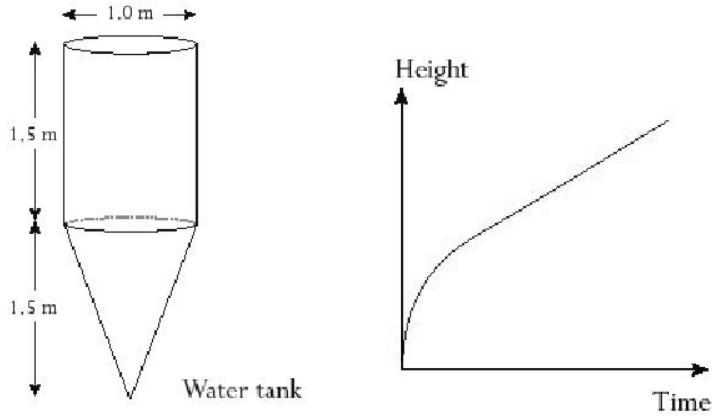
Auf dieser Stufe werden allgemeine Probleme der Modellbildung erkannt, die Fähigkeit entwickelt, kritisch zu beurteilen und allgemeine Zusammenhänge zu erkennen. Es findet eine Reflexion über die Rolle von Modellen innerhalb der Wissenschaft und der Anwendung der Wissenschaft statt. Auf dieser Stufe ist es nicht unbedingt notwendig, zuvor ein Problem mittels Modellbildung bearbeitet zu haben. Denkbar ist hier die Analyse von Problemlöseprozessen, d. h. ein fertiges Modell wird untersucht und die gezogenen Schlussfolgerungen bewertet.

Das vorgeschlagene Stufenmodell ist unabhängig von der jeweiligen Schul-/Bildungsstufe und kann zur Untersuchung eines Längsschnittes über Bildungsstufen (Primarstufe, Sekundarstufe I und II) eingesetzt werden. Als weitere Dimension kann zu den Niveaustufen das jeweilige Anforderungs-/Schwierigkeitsniveau der zugrunde liegenden Aufgabe betrachtet werden.

4 Anwendungssituationen und Niveaustufen der Modellierung

Beispiel 1: PISA-Studie „Water-Tank“ (OECD, 2003).
Modellierungsfähigkeiten auf *Niveaustufe 1*

Das Wassertank-Problem:
Untersucht wird ein realer Wassertank. Zum Anfang ist der Tank leer, dann wird er mit einer Rate von 1 Liter Wasser pro Sekunde gefüllt.
Was du hier siehst, ist das Ergebnis eines Modellbildungsprozesses. Die Schüler haben gewisse Annahmen getroffen und einen Graph gezeichnet. Der Graph zeigt, wie sich die Wasserhöhe im Laufe der Zeit ändert.



a) Beschreibe, wie die Schüler die Modellbildung durchgeführt haben könnten.
b) Welche Annahmen haben sie getroffen?
c) Welche Art von Modell haben die Schüler verwendet?
d) Gibt es Größen oder Annahmen, die nicht im Graph verwendet wurden?
e) Welcher könnte der nächste Schritt nach dem Zeichnen des Graphen sein?

In dieser Aufgabe sollen die Schüler folgende Fähigkeiten unter Beweis stellen:
- Erkennen, dass der Wassertank als zusammengesetztes Objekt betrachtet wird;
- Erkennen, dass die Materialdicke etc. unberücksichtigt bleibt;
- Erkennen, dass ein qualitatives graphisches Modell verwendet wird;
- Erkennen, dass gegebene quantitative Daten nicht im Modell verwendet werden.

Beispiel 2: Dieses Beispiel zielt auf die Anwendung von Modellierungsfähigkeiten der *Niveaustufe 2* ab.
Du siehst hier eine Karte der Erde. Wie viel Land könnte jedem Bewohner der Erde zugeteilt werden?

Löse das Problem. Berichte über deine Vorgehensweise, Annahmen und Ergebnisse.

Eine typische Vorgehensweise wäre:
1. Annahmen:
- Die Erde ist eine Kugel mit 30 % Landfläche.
- Die Erde hat einen Radius r von $6{,}4 \cdot 10^6$ Meter; die Bevölkerungszahl p beträgt $6 \cdot 10^9$ Menschen.

2. Mathematisches Modell:
- Die Erdoberfläche beträgt $f = 4\pi r^2$ Quadratmeter; die nutzbare Fläche sei g.
- Die Fläche s pro Person beträgt $s = g/p$.

3. Modelllösung:
- Jedem Bewohner der Erde könnten $2{,}57 \cdot 10^4$ Quadratmeter zugeteilt werden.

4. Modellvalidierung:
- Eigenschaften der Erde wie Berge, Flüsse, Seen etc. wurden nicht berücksichtigt; die Erde ist keine Kugel; die Form der zugeteilten Fläche wurde nicht berücksichtigt.

Beispiel 3: Dieses Beispiel basiert auf der Aufgabe der PISA-Studie „Rising Crimes“ (OECD, 2003)

Wachsende Zahl an Verbrechen:
In der Tabelle ist die Anzahl der Verbrechen pro 100 000 Einwohner im Zeitraum von 24 Jahren dargestellt.

Jahr	1960	1965	1970	1975	1980	1984
Zahl der Verbrechen	110	200	330	480	590	550

Ein Hersteller von Alarm-Systemen hat diese Daten genutzt, um folgenden Werbespruch zu begründen: „Alle 10 Jahre verdoppelt oder verdreifacht sich die Zahl der Verbrechen. Kaufen Sie jetzt Ihr Sicherheitssystem!“

a) Ist ein lineares Modell in diesem Fall zutreffend?
b) Warum könnte der Hersteller dieses Modell gewählt haben?
c) Ist es möglich, Mathematik zu missbrauchen?

In dieser Aufgabe sind Schüler aufgefordert, ihre Fähigkeiten in der kritischen Reflexion des Modellbildungsprozesses unter Beweis zu stellen. Des Weiteren sollen sie die Fähigkeiten entwickeln, Modelle kritisch zu evaluieren und über die Anwendung von Mathematik zu reflektieren. Hier kann der Fokus auf die gesellschaftliche Relevanz und die Möglichkeiten von Fehlinterpretationen oder Missbrauch mathematischer Modelle gelegt werden.

Die realen Anwendungssituationen reflektieren Modellierungsaufgaben und orientieren sich in ihrer Bearbeitung auf eine tätigkeitsorientierte Auseinandersetzung der Schüler mit dem Inhalt der Aufgabe, vor allem auf das „Suchen“ nach einem die Realsituation adäquat und optimal widerspiegelnden Modell und der Modelllösung.

Im Folgenden werden einige dieser spezifischen Modellbildungsaufgaben (*Niveaustufen 1 bis 3*) vorgestellt.

5 Modellbildungsaufgaben neuen „Typs“

Die Aufgabe HERZSCHLAG wurde konstruiert, um primär Fähigkeiten der *Niveaustufe 1* zu rekonstruieren, d. h. die Schüler erkennen und beschreiben Phasen der Modellbildung:

Während sportlicher Aktivitäten sollte die Herzfrequenz eines Menschen bestimmte Grenzen nicht überschreiten. Diese maximale Grenze der Herzfrequenz hängt unter anderem vom Lebensalter des Menschen, seiner körperlichen Fitness, dem Geschlecht und dem Ruhepuls (Herzfrequenz ohne Anstrengung) ab. Einige Beispieldaten sind in der Tabelle dargestellt.

Max. Herzfrequenz	180	190	195	185
Lebensalter	40	30	18	35

Die Schüler einer 8. Klasse sollten in einem Mathematikprojekt eine Formel zur Berechnung der maximalen Herzfrequenz aufstellen und erarbeiteten die Formel $f = 220 - a$.
Beschreibe stichpunktartig, wie die Schüler die Formel erhalten haben könnten.
Welche Möglichkeiten könnten die Schüler genutzt haben, um die aufgestellte Formel zu überprüfen?
Auf der Basis weiterer Daten veränderten die Schüler die Berechnungsvorschrift und erhielten am Ende des Mathematikprojektes die Formel $f = 208 - 0{,}7a$.
Wie könnten die Schüler auf die zweite Formel gekommen sein? Welche weiteren Schritte könnten unternommen werden, um die Formel zur Berechnung der maximalen Herzfrequenz zu verbessern?

In der Aufgabe HERZSCHLAG sind mögliche zu berücksichtigende Faktoren zur Berechnung der maximalen Herzfrequenz benannt und es wird die Möglichkeit weiterer Einflüsse offengelassen. Die gegebenen Werte sind ohne Einheiten dargestellt und implizieren die Größen Frequenz in Schlägen je Minute und Lebensalter in Jahren.

Keiner der untersuchten Schüler hat die Vernachlässigung der Einheiten und insbesondere weiterer Faktoren erwähnt. Fast alle Schüler haben die Ermittlung der Formel, entweder als Summierung des Alters und der maximalen Herzfrequenz oder als Subtraktion von einer angenommenen maximalen Herzfrequenz von 220 und des Lebensalters, beschrieben, etwa die Hälfte der Schüler hat die Variablenzuordnung erwähnt.

Die Aufgabe RASENMÄHEN wurde mit dem Ziel konzipiert, Fähigkeiten der Schüler zu rekonstruieren, die sich primär in der Niveaustufe 2 verorten lassen. Die Bearbeitung der Aufgabe erfordert Fähigkeiten aus allen Phasen des Modellbildungsprozesses:

Claus möchte den ganzen Garten mit Rasen ausgestalten und bittet dich, eine Übersicht zu erstellen, wie viel Rasen in einer bestimmten Zeit gemäht werden kann. Da eure Gartenfläche rechteckig ist und der Rasenmäher genau eine Schnittbreite von 0,5 m besitzt, kann man durch Schätzen ungefähr ermitteln, wie viel Fläche in m² je Minute man schaffen kann.
Stelle eine Funktionsgleichung auf, die die Abhängigkeit der gemähten Fläche von der Zeit darstellt.
Stelle die Funktion grafisch in einem Koordinatensystem dar.
Du möchtest am nächsten Tag deine Ergebnisse im „Familienrat“ vorstellen und auf mögliche Einwände und Fragen gut vorbereitet sein. Fertige eine Skizze an, die den Garten und den „Weg“ des Rasenmähers darstellt.
Welche Annahmen und Vereinfachungen musst du treffen, damit deine Funktion gültig ist?
Welche Faktoren, Größen und Gegebenheiten lassen sich nur schwer in der Funktionsgleichung berücksichtigen?

Innerhalb der Aufgabenbearbeitung des Problems ENTFERNUNGSMESSUNG werden Verfahrenskenntnisse der Modellvalidierung sowie Fähigkeiten, welche sich primär auf *Niveaustufe 3* einordnen lassen, angesprochen:

Mittels eines Laufrades werden Entfernungen, z. B. bei Verkehrsunfällen, gemessen. Schildere stichpunktartig die Methode der Entfernungsmessung mittels Laufrad. Wie könnte man die Qualität (Genauigkeit) der Entfernungsmessung mittels Laufrad überprüfen? Von welchen Einflussgrößen hängt die Genauigkeit der Entfernungsmessung mittels Laufrad ab? Welche der ermittelten Einflussgrößen sind mathematisch leicht berechenbar und welche sind deiner Meinung nach schwer zu berechnen?

Im Ergebnis des Unterrichts konnten bezüglich der Modellbildungskompetenz folgende Qualitätserhöhung des Wissens und Könnens (betreffs der Modellierungsfähigkeiten) erreicht werden: Die Schülerinnen und Schüler erkennen deutlich den Unterschied zwischen innermathematischen Aufgaben und Aufgaben mit Realitätsbezug und können differenzieren zwischen Begriffen wie Modell, Realität, Modelllösung und Problemlösung. Die Schüler wissen, dass die mathematische Lösung im Sinne einer Modellvalidierung innerhalb der Realität geprüft werden muss. Die Schüler können eigene Handlungen im Modellbildungsprozess verorten und besitzen ein höheres Maß an kritischer Distanz zum Problemkreis Mathematik und Anwendung von Mathematik im täglichen Leben. Die Schüler haben am Ende der Unterrichtsreihe viel häufiger sich selbst und die Aussagen und Annahmen ihrer Mitschüler hinterfragt, nach Alternativen oder Grenzen von Annahmen und Abstraktion gesucht.

Literatur

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht: Trends und Perspektiven. In: Kadunz, G./Kautschitsch, H./Ossimitz, G./Schneider, E. (Hrsg.): Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Band 23. S. 15 – 38. Hölder-Pichler-Temsky.

Henning. H./Keune, M. (2000): Modellbildung und Tabellenkalkulation. In: Mathematik in der Schule 38. Heft 3. S. 160 – 169. Pädagogischer Zeitschriftenverlag.

Henning, H./Keune, M. (2002): Modelling and Spreadsheet Calculation. In: Vakalis, I./Hallett, D. H./Kourouniotis, C./Quinney, D./Tzanakis, C. (Eds.): Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). Wiley. ID114 CD-ROM.

Ikeda, T./Stephens, M. (2001): The effects of students' discussion in mathematical modelling. In: Matos, J. F./Blum, W./Houston, S. K./Carreira, S. P. (Eds.): Modelling and Mathematics Education. S. 381 – 390. Horwood.

International Commission on Mathematical Instruction [ICMI] (o.J.). ICMI Study 14: Application and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document.

Jablonka, E. (1996): Meta-Analyse von Zugängen zur Mathematischen Modellbildung und Konsequenzen für den Unterricht. Transparent.

Klieme, E. (Koordination) et al. (2003): Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards – Eine Expertise. Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung (DIPF).

Maaß, K. (2004): Mathematisches Modellieren im Unterricht: Ergebnisse einer empirischen Studie. Franzbecker.

Niss, M. (2003): Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project.

OECD – Deutsches PISA-Konsortium (2000): Schülerleistungen im internationalen Vergleich: Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten. Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

OECD (2003): The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.

Weinert, F. E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: Weinert, F. E. (Hrsg.): Leistungsmessung in Schulen. S. 17 – 31. Beltz Verlag.